



# Prófadrifin kennsla og umhyggja fyrir stærðfræðinámi

Ingólfur Gíslason

► Abstract    ► Um höfund    ► About the author    ► Heimildir

Í íslenskum framhaldsskólum taka nemendur íðulegamörg próf í sínum stærðfræðiáföngum, bæði hlutapróf og lokapróf, auk þess sem þeir skila öðrum verkefnum sem gilda til lokaeinkunnar. Nemendur og kennarar eru oft mjög uppteknir af þessu prófahaldi. Nemendur hafa áhyggjur af árangri sínum á prófum og kennarar verja miklum tíma í að undirbúa og fara yfir próf. Ég ræði og greini slíka prófadrifna stærðfræðikennslu frá heimspekilegu sjónarhorni sem nefnist umhyggja fyrir stærðfræðinámi. Það sjónarhorn byggir á að leiða saman hugmyndir um stærðfræðikennslu sem umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir stærðfræði, auk umhyggju fyrir samfélaginu í heild. Markmið rannsóknarinnar er að setja fram og nota slíkt siðferðislegt sjónarhorn til að gagnrýna námsmatvenjur í stærðfræðikennslu. Ég set fram og túlka átta stuttar atvikasögur úr eigin stærðfræðikennslu í íslenskum framhaldsskólum sem tengjast prófum og einkunnagjöf. Sögurnar varpa ljósi á hvað umhyggja fyrir stærðfræðinámi felur í sér og hvaða möguleikar eru til að iðka slíka umhyggju í prófadrifinni kennslu. Sögurnar draga einnig fram „þrefalda togstreitu“ sem stærðfræðikennarar þurfa að takast á við í starfi sínu: Í fyrsta lagi að reyna að mæta þeim þörfum sem nemendur tjá og rækta tengsl við þá, í öðru lagi að hafa í heiðri gildi stærðfræðinnar um sannleiksleit og röksemdafærslur og í þriðja lagi að uppfylla kröfur skólakerfisins og samfélagsins um mælanlegan árangur af kennslunni. Niðurstöður mínar eru að prófadrifin kennsla hafa grafið undan umhyggju minni og nemenda minna fyrir stærðfræðinámi.

*Efnisorð:* próf, umhyggja, stærðfræðikennsla, einkunnir

## Bakgrunnur

Í íslenskum framhaldsskólum er algengt að nemendur taki mörg próf og skili verkefnum sem þeir fá einkunn fyrir. Prófin hafa mikil áhrif á kennslu og nám því nemendur eru oft mjög uppteknir af að ná árangri á prófum og kennarar verja umtalsverðum tíma og orku í að útbúa próf, undirbúa nemendur fyrir próf og fara yfir próf (Hafdís Ingvarsdóttir, 2018; Laufey Petrea Magnúsdóttir, 2015). Vísbendingar eru um að stærðfræðikennarar leggi meiri áherslu á hefðbundin próf en margir aðrir kennarar (Elsa Eiríksdóttir og Ingólfur Ásgeir Jóhannesson, 2016). Í nýlegri rannsókn lýstu kennaranemar við Háskóla Íslands yfirgnæfandi neikvæðum tilfinningum í garð stærðfræðinnar, og hugsuðu reynslu sína af stærðfræðinámi (í grunn- og framhaldsskóla) einkum í samhengi við gengi á prófum (Ingólfur Gíslason og Berglind Gísladóttir, 2021). Því er mikilvægt að átta sig á hvað prófadrifin stærðfræðikennsla og -nám hafa í för með sér og hverjar rætur slíkrar kennslu eru. Sjónarhornið í þessari grein er kennarans frekar en til dæmis nemenda, ytri rannsakanda eða þeirra sem taka kerfislægar ákvarðanir. Ég legg fram heimspekilega greiningu á stuttum atvikasögum úr minni eigin kennslu, sem fjalla um áhrif dæmigerðs prófahalds á stærðfræðikennslu. Greiningunni er ætlað að varpa ljósi á mótsagnir og togstreitu í stærðfræðikennslu, en hún gengur út frá því

kenningarlega sjónarhorni að stærðfræðikennsla feli í sér umhyggju fyrir nemendum, umhyggju fyrir stærðfræði og umhyggju fyrir samfélaginu – síðfræðilegu sjónarhorni sem mætti í heild sinni nefna *umhyggju fyrir stærðfræðinámi*. Samkvæmt þessu sjónarhorni er ekki hægt að bera umhyggju fyrir stærðfræðinámi nema að bera umhyggju fyrir nemendum, stærðfræði og samfélagi. Ég held því ekki fram að umhyggja fyrir stærðfræðinámi sé eina kenningarlega sjónarhornið sem getur varpað gagnlegu ljósi á atvikasögurnar eða prófadrifna stærðfræðikennslu, en markmið greinarinnar er að þróa þetta kenningarlega sjónarhorn og beita því á prófadrifna stærðfræðikennslu. Með því er ætlunin að vekja fræðafólk og kennara til umhugsunar um hvort og hvernig slík kennsla samræmist mikilvægustu gildum í kennslu.

## Prófadrifin kennsla

Með *prófadrifinni kennslu* er í þessari grein átt við kennslu þar sem einkunnagjöf fyrir verkefni og próf leikur veigamikil hlutverk í huga nemenda. Aðalatriðið er ekki hvert vægi einstakra verkefna er í lokaeinkunn, heldur hvort nemendur upplifi vægið sem þungt, það er að segja að það skipti miklu máli hver útkoman er. Mikilvægasta einkenni hefðbundins prófs (e. test) er að úrlausnin er metin og notuð til þess að búa til tölu eða bókstaf sem gildir sem opinber dómur um árangur nemanda og þessi tala skiptir máli fyrir framgang nemandans í skólakerfinu. Þetta gerir prófið að *lokamati* (e. summative assessment) að svo miklu leyti sem það er nýtt í þessu skyni (William, 2011). Í samræmi við þetta markmið prófa, og í því skyni að gefa tilefni til samanburðar milli nemenda, er það einnig samræmt fyrir einhvern hóp og án skipulagðra möguleika til endurskoðunar af hendi nemenda. Mörg veigaminni próf inni á önn eru stundum kölluð *símat* (e. ongoing assessment) en að svo miklu leyti sem þau eru nýtt í þeim tilgangi að gefa lokaeinkunn flokkast þau undir lokamat samkvæmt skilgreiningunni. Á Íslandi eru slík próf stundum kölluð kannanir, æfingar, kaflapróf, *hlutapróf* eða skyndipróf, þó að stundum sé síðastnefnda orðið frátekið fyrir óvænt próf. Ég nota orðið hlutapróf fyrir öll próf úr einhverjum hluta námsefnis sem haldin eru á kennslutímabilinu og hafa vægi í smíði lokaeinkunnar. Ég ræði líka hefðbundin heimadæmi í þessari grein að svo miklu leyti sem fyrir þau sé gefin einkunn sem hefur vægi í lokaeinkunn og virkni þeirra því að mörgu leyti eins og hlutaprófa, þó að eðli þeirra sé frábrugðið í ýmsum atriðum. Í þessari grein er ekki fjallað sérstaklega um próf sem „gilda aðeins til hækunar“ eða próf sem má endurtaka á námstímabilinu, eða aðra þætti sem stundum eru notaðir til að mynda einkunnir, svo sem mat á ástundun.

Í skrifum fræðimanna er iðulega bent á sterk tengsl milli þess hvernig námsmati er hagað og kennsluhátta. Próf hafa áhrif á kennslu, eins og birtist til dæmis skýrt í prófum sem ytri stofnanir standa fyrir, eins og samræmdum prófum við lok grunnskóla hér á landi (Erna Ingibjörg Pálsdóttir, 2007; Rúnar Sigþórsson, 2008) og víðar (OFSTED, 2006). Innihald prófa jafngildir í raun yfirlýsingu fyrir nemendur (og samfélagið í heild) um hvað telst vera mikilvæg þekking í þeirri grein sem prófað er úr (Kvale, 1996). Þannig tjá stærðfræðipróf skilaboð um hvað *stærðfræði* er (William o.fl., 2004), hver kjarni hennar og gildi séu. Rök hafa verið færð fyrir því að hugmyndir kennara um eðli og gildi kennslugreinar (hver sé kjarni hennar, hvað skipti meira máli en annað, og svo framvegis) hljóti að hafa afgerandi áhrif á kennsluhætti (Hersh, 1979).

## Stærðfræðikennsla og námsmat í íslenskum framhaldsskólum

Á undanförunum árum hafa birst nokkrar fræðilegar greinar um stærðfræðinámi og -kennslu í íslenskum framhaldsskólum. Bjarnheiður Kristinsdóttir (2022; Bjarnheiður Kristinsdóttir o.fl., 2020) hefur fjallað um nýstárlega gerð af verkefnum sem nefnast hljóðlaus myndbönd, hvernig nokkrir kennarar hafa mátað sig við notkun slíkra verkefna og hvaða tækifæri og hindranir eru við upptöku þeirra. Ein aðalástæðan sem kennarar gáfu fyrir því að búast ekki við að nota hljóðlaus myndbandsverkefni aftur var að sú vinna myndi ekki undirbúa nemendur þeirra beint fyrir lokaprófin. Ingólfur Gíslason hefur rannsakað merkingarsköpun nemenda í stærðfræði í framhaldsskóla með kennara sem leggur áherslu á samræður og notkun tölvutækni (2021, 2023). Í þeirri rannsókn vann kennarinn út frá hugmyndum um leiðsagnarmat og ekki voru haldin hefðbundin próf (hvorki hlutapróf né lokapróf) eins og rædd eru í þessari grein, en engu að síður beindist orðræða nemenda þráfaldlega að prófum og einkunnum,

enda áttu þeir von á lokaeinkunn í áfanganum þrátt fyrir allt. Í því samhengi, og til frekari skýringa, er einnig vert að nefna að rannsóknir á kennsluháttum í efri bekkjum grunnskóla hafa ítrekað leitt í ljós að stærðfræðikennsla sé þar almennt einhæf og byggist á einstaklingsvinnu nemenda í verkefna- eða vinnubækur auk „innlagna“ kennara (Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2015; Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2014; Savola, 2008; Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson, 2012) og nemendur skorti nauðsynlega vitsmunalega áskorun (Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir, 2020). Í þessum rannsóknum er athyglinni ekki beint sérstaklega að námsmati, en ekki verður annað ráðið af þeim en að námsmat fari einkum fram með skriflegum einstaklingsverkefnum, það er hlutaprófum og lokaprófum. Í sumum af þessum skrifum kemur þó fram að vísbandingar séu um að námsmat sé víða í þróun í grunnskólum, einkum á yngri stigum (Ingvar Sigurgeirsson o.fl., 2014), án þess að það verði af þeim ráðið hvort það eigi við um stærðfræði og þá á hvaða hátt.

Í grein Hafdísar Ingvarsdóttur um rannsóknina *Starfshættir í framhaldsskólum* (2018) kemur fram að próf almennt (ekki aðeins í stærðfræði) skipi stóran sess í skólastarfinu í nær öllum þeim níu framhaldsskólum sem voru í þeirri rannsókn. Kennarar litu á og notuðu hlutapróf sem agatæki og nemendur voru mjög uppteknir af þeim. Að mati Hafdísar bendir „hin sterka skyndiprófahefð“ til þess að nemendum sé lítið treyst fyrir eigin námi. Í samræmi við þetta kom fram í meistarafráttgerð Laufeyjar Petreu Magnúsdóttur (2015) um skólamenningu í Menntaskólanum á Akureyri að stærðfræðikennarar þar litu á einkunnir sem „gulrót fyrir nemendur“ (bls. 113). Þar segir einnig að tölverð umræða hafi verið innan skólans um hlutverk stærðfræðinnar að flokka nemendur niður á námsbrautir skólans og jafnvel út úr skólanum á meðan stærðfræðikennararnir sjálfir voru uppteknir af að viðhalda kröfum í samræmi við eðli greinarinnar. Í lítilli viðtalsrannsókn Elsu Eiríksdóttur og Ingólfs Ásgeirs Jóhannessonar (2016) komu fram þau sjónarmið stærðfræðikennara við framhaldsskóla að þeir héldu próf til að tryggja að nemendur ynnu örugglega vinnuna sjálfir og svindluðu ekki, og að kennararnir litu svo á að stærðfræði væri íhaldssöm grein sem hefði þá eðlilega í för með sér gamaldags matsaðferðir. Af þessu má ráða að hugmyndir kennara um eðli stærðfræðinnar hafi afgerandi áhrif á námsmat í greininni. Í rannsóknum sínum á námsmati í íslenskum framhaldsskólum hefur Ívar Rafn Jónsson (2022) greint að í þeim er ólík námsmatmenning. Í sumum skólum er lögd áhersla á leiðsagnarmat og í þeim skólum ætti prófadrifin kennsla að vera á undanhaldi. Ívar skoðaði þrjá skóla og í þeim tveimur skólum þar sem áhersla var á leiðsagnarmat voru jákvæðari tengsl á milli kennara og nemenda en í þriðja skólanum, og prófa- og einkunnamiðun námsmatmenning endurspegladist í yfirborðslegri nálgun nemenda í námi og neikvæðri afstöðu til þátttöku nemenda í námsmati. Ívar fjallar hins vegar ekki um hve útbreidd notkun leiðsagnarmats er í íslenskum framhaldsskólum, og sér í lagi ekki hver staðan sé í stærðfræði.

Í skýrslu um stærðfræðikennslu í framhaldsskólum frá 1987 kemur fram að námsmat í stærðfræði hafi falist í að gefa einkunnir fyrir próf, bæði hlutapróf og yfirlitspróf við lok áfanga eða anna (Benedikt Jóhannesson, 1987). Á Íslandi hafa aldrei verið samræmd próf í stærðfræði við lok framhaldsskóla, ólíkt því sem gerist í mörgum öðrum löndum. Ein tilraun var gerð til að halda slík próf, árið 2005 (auk samræmdra prófa í íslensku árin 2004 og 2005), en vegna andstöðu kennara og nemenda voru þau ekki haldin aftur (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2020). Í úttekt á stærðfræðikennslu í níu framhaldsskólum frá 2014 kemur fram að algengast var að lokapróf giltu um 60–70% af einkunn fyrir áfanga og það sem eftir stóð var fengið með einkunnum fyrir hlutapróf og verkefni sem í flestum tilvikum (90%–100%) voru skrifleg einstaklingsverkefni þar sem fengist var við „einföld viðfangsefni sem eru leyst með því að fylgja gefinni forskrift“ (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Reynsla mín sem stærðfræðikennari í tveimur framhaldsskólum, sem háskólakennari nemenda sem fara í vettvangsnám í framhaldsskóla og af samræðum á faglegum vettvangi, bendir eindregið til þess að stærðfræði í íslenskum framhaldsskólum einkennist af prófadrifinni kennslu. Einkunn er einfaldlega samsett úr einkunnum fyrir hlutapróf og lokapróf, auk þess sem stundum eru einkunnir fyrir heimaæmi tekin inn (en vega yfirleitt ekki þungt). Öll þessi próf falla undir skilgreiningu mína á prófi. Annars konar námsmat er hugsanlega að finna, eða í þróun, í einhverjum framhaldsskólum landsins, en miðað við fyrirliggjandi þekkingu eru prófin ríkjandi.

## Umhyggja

Grundvallarhugtök greinarinnar eru *umhyggja* og *umhyggjutengsl*. Í greiningu minni styðst ég fyrst og fremst við orðræðuhæfð *umhyggjusíðfræði* (e. care ethics, relational ethics) sem má rekja til femínískra heimspekinga í Bandaríkjunum sem gera þessi hugtök að meginatriði en líka skrif nokkurra stærðfræðimenntafræðinga sem fjallað hafa um umhyggju í stærðfræðikennslu. Til eru fleiri orðræðuhæfðir sem eru mjög skyldar – það er að segja orðræðuhæfðir sem ganga út frá því að mannleg tengsl séu öllu öðru mikilvægara í mannlegri tilveru. Þar má til dæmis nefna *ubuntu* heimspeki frá Afríku sunnan Sahara og dialógisma sem rekja má til rússneska heimspekingsins Bakhtin (Birhane, 2021). Það sem einkennir þessar orðræðuhæfðir er sú forsenda að tengsl séu okkur mannfólkinu mikilvægari heldur en til dæmis réttlæti þegar við tökum afstöðu, fyrir tilfinningar okkar og ákvarðanir. Samkvæmt þessum hefðum lítum við ekki á fólk sem frjálsa og óháða einstaklinga heldur sem virka þátttakendur í ótal tengslum við aðra, þar sem við erum öll háð öðrum og aðrir eru háðir okkur, við berum ábyrgð á öðrum og aðrir bera ábyrgð á okkur. Ræktun tengsla, sér í lagi með samskiptum, fær því forgang fram yfir til dæmis síðferðisleg skyldubodord eða nytjasjónarmið. Í þessu felst einnig að tilfinningar fá aukið vægi – því öll mannleg tengsl eru þrúningin tilfinningum. Að þessu leyti eru þessar orðræðuhæfðir frábrugðnar, og í raun róttæk gagnrýni á, hefðbundna og ríkjandi síðferðisorðræðu samtímans (Gústaf Adolf Bergmann Sigurbjörnsson, 2014).

Í íslensku er orðið umhyggja sterklega tengt huglægum fyrirbærum eins og *tilfinningum* á borð við væntumþykju og kærleik og *afstöðu* eins og að vilja fólki vel, og að standa ekki á sama um fólk. Þannig skrifar Sigrún Aðalbjarnardóttir (2007) að í umhyggju felist að vera annt um „líðan, velferð og framtíðarhag“ annarra (bls. 75). Umhyggja tengist þó líka hlutlægum *athöfnum* sem miða beinlínis að því að hjálpa fólki, styðja það í verki, annast um það, sýna því áhuga. Í greiningu sinni á umhyggjusíðfræði nefnir Gústaf Adolf Bergmann Sigurbjörnsson (2014) að í ensku hafi orðið „care“ örlítið annan blæ og skírskotanir en íslenska orðið umhyggja að því leyti að erfiðara sé að ímynda sér að veita umhyggju nema að hafa til að bera tilfinningar á borð við væntumþykju. Hins vegar sé mögulegt að „care for“ án þess að slíkar tilfinningar fylgi með, en á íslensku væri þá hægt að nota orðið umönnun. Ég mun gera ráð fyrir að umhyggja felist bæði í huglægri tilfinningu og afstöðu en einnig í athöfnum.

Í *Aðalnámskrá framhaldsskóla 2011* er áréttað á nokkrum stöðum að koma skuli til móts við ólíkar námsþarfir nemenda og að öllum sé boðið nám við hæfi, eins og stendur einnig í 2. gr. laga um framhaldsskóla (nr. 92/2008). Í þessum orðum má finna vísi að þeirri hugmynd að kennarar sýni nemendum umhyggju í þeim skilningi sem hér er lagður í hugtakið. Umhyggjuhugtakið sjálf er ekki notað í námskránni en finna má skyldar hugmyndir í almennum tilmælum eins og „fagmennska kennara snýst um nemendur, menntun þeirra og velferð“ (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2015, bls. 11). Í síðareglum Kennarasambands Íslands (eins og þær voru samþykktar 2022) er lagt til að kennari sýni nemendum „áhuga og umhyggju“ auk þess sem hægt er að túlka fleiri reglur þannig að í þeim felist umhyggja fyrir nemendum, svo sem eins og þeim að kennari beri virðingu fyrir fjölbreytileika og ólíkum þörfum og láti sig varða hagsmuni og velferð nemenda (Kennarasamband Íslands, 2022). Af þessu má draga þá ályktun að vitund um umhyggju sem hluta af hlutverki kennara sé til staðar í formlegum reglum á vegum yfirvalda og kennara sem fagstéttar án þess að það sé skýrt í hverju hún eigi að felast í kennslunni sjálfri og án þess að hugtakið sé skilið kenningarlegum skilningi eins og hér er gert.

Að hvaða leyti felur kennsla þá í sér umhyggju og af hverju er hún mikilvæg í skólastarfi? Samkvæmt umhyggjusíðfræði snýst umhyggja mín um að beina athygli minni að og mæta þörfum annarrar manneskju sem ég tek ábyrgð á (Held, 2006). Bubeck (samkvæmt Held, 2006) tekur fram í sinni skilgreiningu að þarfirnar sem um er rætt séu þess eðlis að manneskjan sem þiggur umhyggjuna geti ekki mögulega uppfyllt þær sjálf. Samkvæmt þessari skilgreiningu getur kennsla til dæmis falið í sér umhyggju þegar nemandinn getur ekki lært námsefnið án kennara, eða ekki jafn vel. Líklega er umfang og áhersla á kennslu stærðfræði í menntakerfum heimsins að einhverju leyti vegna þess að það er ekki auðvelt að læra stærðfræði án kennara. Það var að minnsta kosti skoðun menntaskólakennara sem skrifaði um stærðfræðikennslu á Íslandi snemma á 20. öld:

Til þess að komast niður í [stærðfræði] þarf mikla sjálfstæða vinnu og þolinmæði, og það er mjög sjaldgæft að óskólagengnir menn séu vel að sér í stærðfræði: *þar munu flestir þurfa aðstoð kennara*, til að brjóta ísinn, og halda vökinni auðri að baki sér (Sigurkarl Stefánsson, 1929, bls. 54, leturbreyting mín).

Bandaríski heimspekingurinn Nel Noddings er sennilega sú sem á mestan þátt í að koma mikilvægi umhyggju í kennslu í fræðilega umræðu. Samkvæmt hennar skilgreiningu á umhyggjutengslum (2002, 2003, 2012) er þeim lýst í þremur „þrepum“. Í fyrsta þrepi er að *veita athygli* þeim sem maður veitir umhyggju. Markmiðið er að skilja upplifun þess sem umhyggjan beinist að og þær þarfir sem hann tjáir. Þarfnar geta mögulega verið á skjön við þær þarfir sem skólinn eða námskráin gerir ráð fyrir að mæta. Kennarinn er í hlutverki túlkanda, eins og við erum öll í öllum okkar samskiptum við aðra, en í því hlutverki sem og öðrum verðum við að forðast að varpa okkar forhugmyndum á hinn. Noddings bendir í sama anda á að mikilvægt sé að kennarinn hugsi um hvernig nemandanum líði en ekki hvernig honum sjálfum líði í sömu aðstæðum (Noddings, 2012, bls. 775). Í næsta þrepi, samkvæmt Noddings (2012), *togar í kennarann* löngun að uppfylla þarfir nemandans. Til dæmis gæti nemandi tjáð þörf á hjálp við að leysa verkefni og kennarinn finnur fyrir þörf til að hjálpa honum til þess, en kennarinn gæti líka metið það sem svo að sú hjálp sem nemandinn óskar sé ekki lögmæt. Hann gæti þá reynt að sannfæra nemandann um að endurskoða þarfir sínar og markmið. Þetta getur til dæmis gerst ef nemandinn vill vita nákvæmlega hvernig á að svara tiltekinni spurningu sem kennarinn hefur lagt fyrir í þeirri trú að nemandinn geti því aðeins lært af henni ef hann reyni vitsmunalega á sig. Í stærðfræðimenntun er talað um *fræðslutogstreituna*, (e. the didactic tension): Eftir því sem kennarinn sýnir skýrar og nákvæmar hvaða atferli hann vill sjá hjá nemendum, þeim mun auðveldara er fyrir nemendur að sýna atferlið án þess að skilningur komi við sögu (Brousseau, 1997, bls. 41). Með hliðsjón af að umhyggja felist í að uppfylla (aðeins þær) þarfir sem viðtakandi umhyggjunnar getur ekki uppfyllt sjálfur er rökrétt fyrir umhyggjusaman stærðfræðikennara að gera ekki það fyrir nemendur sem þeir geta sjálfir gert – og ekki hjálpa nemendum að forðast að takast á við stærðfræðilegar áskoranir. Í þriðja og síðasta þrepi, eftir að hafa hlustað og fundið fyrir þeirri þörf sem nemandi tjáir, verður kennari að *bregðast við* tjáningunni. Hann getur þá hugsanlega reynt að mæta þeim þörfum sem nemandinn hefur tjáð, til dæmis með því að styðja hann, en stundum getur kennarinn haft ástæðu til þess að uppfylla *ekki* þessar þarfir, eins og í fræðslutogstreitunni. Hann verður þá að veita viðbrögð jafnframt því sem hann reynir að rækta umhyggjutengslin og leitast við að finna niðurstöðu í samræðu sem nemandinn getur orðið sáttur við. Í umhyggjutengslum þarf því að ríkja *traust* (e. trust), það er að segja skilningur á að hinn aðilinn vilji þér vel fremur en að hann hafi í hyggju að nýta sér samskiptin í eigin þágu eða gera þér óleik (Held, 2006; Noddings, 2012). Í skólastofunni geta ekki verið umhyggjutengsl nema að nemendur treysti því að kennarinn vinni í þeirra þágu, til dæmis að verkefnin sem hann biður þá að vinna muni stuðla að velgengni þeirra í skólanum, og að þeir geti tjáð þarfir sínar án þess að óttast að sú tjáning muni leiða til þess að kennarinn hætti við að sýna þeim umhyggju.

Umhyggjutengsl í þessum ofangreinda skilningi sem hér er notaður eru ekki einstefna heldur felast þau í tengslum milli manneskja og ekki er á færi einnar manneskju að ákveða að hún sé í umhyggjutengslum við aðra. Framlag þess sem tekur við umhyggjunni er að sýna með einhverjum hætti að umhyggjan hafi verið móttekin. Þannig getur barn til dæmis viðurkennt umhyggju móður með því að hætta að gráta og nemandi getur brugðist við umhyggju kennarans með því að beita sér í náminu, og sýna spurningum hans og verkefnum áhuga. Noddings (2012) leggur áherslu á að án viðurkenningar af þessu tagi séu ekki umhyggjutengsl í reynd.

Samkvæmt Noddings (2002) gerist það oft í skólum að ekki myndast umhyggjutengsl milli kennara og nemenda. Nemendum getur fundist að kennarinn sýni þeim ekki umhyggju, honum standi á sama um líf þeirra og skoðanir – hann sjái þá ekki fyrir það sem þeir eru. Í meistararitgerð Láru Huldar Björnsdóttur (2014) kemur fram að íslenskum framhaldsskólanemum fannst sjaldgæft að kennarar væru umhyggjusamir í þessum skilningi. Það má ef til vill gagnrýna Noddings fyrir að gera of mikið úr, og festa í sessi, ólík hlutverk kennara og nemenda í umhyggjutengslum. Líklega nægir kennara ekki viðurkenning nemenda á að hann hafi veitt þeim umhyggju. Kennara getur líka fundist að nemendum sé sama um það sem hann hefur fram að færa og hefur lagt vinnu í að undirbúa.

Þannig getur kennari upplifað tilfinningalegan skort á umhyggju fyrir sér sem kennara (Hackenberg, 2005). Þá er ótalið að kennari getur upplifað skort á tíma og tækifærum til að sinna umhyggju fyrir sjálfum sér og erfiðar vinnuaðstæður, sem væru til marks um vöntun á umhyggju fyrir kennaranum af hendi yfirvalda, en frekari umræða um það væri út fyrir efni þessarar greinar.

## Umhyggja fyrir stærðfræði

Kennsla er ekki eingöngu um tengsl milli kennara og nemanda – hún á sér einnig þekkingarlegt viðfang: *námsefnið*, sem hér er sú grein þekkingar sem nefnist stærðfræði. Nokkrir rannsakendur hafa sett fram þá hugmynd að stærðfræðikennsla sé umhyggjustarf sem feli í sér tvenns konar umhyggju; umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir stærðfræði (Hackenberg, 2005; Mason, 2009; Mason og Hanna, 2016; Watson, 2021). Með umhyggju fyrir nemendum er þá átt við umhyggju í þeim anda sem hér hefur verið rætt um, og vitnað í Noddings því til stuðnings og skýringa. Watson (2021) sameinar umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir stærðfræði undir hugtakinu *umhyggja fyrir stærðfræðinámi* (e. care for the learning of mathematics). Umhyggja fyrir fræðigreini er auðvitað af öðru tagi en umhyggja fyrir fólki, en þessir fræðimenn telja að með því að einblína á að skynja nemandann og þær þarfir sem hann tjáir, sé hætta á að dregið sé úr möguleikum hans til stærðfræðináms. Sem dæmi geta nemendur til dæmis haldið að þeir hafi ekkert við stærðfræði að gera og hún komi þeim ekki við. Watson (2021) gagnrýnir þannig hugmyndir Noddings þess efnis að ekki allir nemendur þurfi að læra flókna stærðfræði, eins og algebru, hornafræði eða deildunar- og heildunarreikning, og bendir á að nemendur hafi oft of litla vitund um merkingu stærðfræðinnar til þess að geta metið sína eigin þörf fyrir hana eða mögulegan áhuga á greininni. Margir nemendur (á öllum skólastigum) hafi óljósa hugmynd um hvað stærðfræði snýst í raun og veru vegna þess að kennsla þeirra hafi miðast við að þeir læri að herma eftir aðferðum án þess að nein merking liggi að baki. Skólakerfið, kennarar, próf og flokkun nemenda eftir getu og brautum eru allt hlutir sem móta áhuga og þarfir í huga nemenda fyrir stærðfræði. Skoðun nemenda á hvort stærðfræði sé eitthvað fyrir þá er hvorki sjálfsprottin skoðun þeirra sjálfra né yfirleitt ákvörðun sem byggir á þekkingu á eðli greinarinnar (Watson, 2021). Þetta þýðir að umhyggja fyrir nemendum sem fæli í sér að sleppa þeim við að takast á við krefjandi verkefni og kenna þeim þess í stað að fara eftir forskriftum eða þumalputtareglum án þess að skilningur fylgdi, væri ekki umhyggja fyrir stærðfræði. Biesta (2005) setur, í svipuðum anda, fram almenna menntaheimspekilega gagnrýni á að menntun snúist um að kennari veiti nemanda þá þekkingu sem nemandinn þurfi, vegna þess að það byggir á þeirri röngu forsendu að nemandinn þekki þarfir sínar. Menntun felist mun fremur í að kynnast þörfum sínum, eða skapa þær, með því að kljást við áskoranir og hið áður óþekkt og framandlega.

Samkvæmt Ernest þykir stærðfræðingum og stærðfræðikennurum iðulega vænt um greinina og hafa ástríðu fyrir henni: Stærðfræði er heillandi, gagnleg, falleg, þrungin merkingu og leið að velgengni í lífinu (Ernest, 2019). Þó er rétt að hafa í huga að stærðfræðikennsla er oft í höndum fólks sem hefur litla menntun í stærðfræði og þeim þykir ekki endilega vænt um hana. Þetta kom meðal annars fram í máli raungreinakennara í íslenskum framhaldsskólum í rannsókn Hafdísar Ingvarsdóttur (2004). Fræðafólk, stærðfræðingar og heimspekingar hafa líka lýst því og rökstutt að skólastærðfræði og stærðfræði sem fræðigreini séu tvö ólík fyrirbæri með ólíkan tilgang og eðli (sjá til dæmis Civil, 2002; Watson, 2008). Stærðfræðingar velja sín viðfangsefni sjálfir og glíma við þau dögum, vikum eða jafnvel árum saman, með það fyrir augum að birta opinberlega lausnir við spurningum sem enginn veit svörin við. Gagnstætt þessu eru verkefni nemenda yfirleitt valin fyrir þá, svörin eru þekkt, nemendur leysa þau á nokkrum mínútum og lausnirnar enda í ruslinu, því enginn hefur áhuga á þeim sem slíkum. Flestir sem um þetta rita hafa þá skoðun að skólastærðfræði ætti helst að færa sig í áttina að stærðfræðinni sjálfri, þó að markmiðin séu ólík.

Umhyggja fyrir stærðfræði felur í sér að virða gildi og viðmið stærðfræðinnar og að stuðla að auknum vegi hennar sem félagslegs, sögulegs og menningarlegs fyrirbæris. Til dæmis er stærðfræðilegt viðmið að stærðfræðilegar fullyrðingar séu ekki samþykktar sem sannar fyrr en þær hafi verið sannaðar, það er að segja rökstuddar á skýran og skiljanlegan hátt út frá stærðfræðilega skilgreindum eiginleikum og áður samþykktum fullyrðingum. Með sönnun er hér ekki aðeins átt við akademískan texta eins og

Í fræðiritum eða kennslubókum í stærðfræði á háskólastigi (eða eins og sést í sumum kennslubókum fyrir framhaldsskóla) heldur röksemdafærslu af því tagi sem hefur merkingu og sannfæringarkraft fyrir nemendur á því stigi sem þeir eru. Að þessu leyti er stærðfræði ólík flestum öðrum fræðigreinum og námsgreinum í skólum, þar sem í til dæmis náttúruvísindum leika tilraunir og vísun í efnislegan veruleika og reynslu mun stærra hlutverk. Eins og stærðfræðingar lýsa sinni grein er stærðfræðiiðkun lifandi og skapandi ferli þar sem sannanir eru í fyrirrúmi (sjá til dæmis Lockhart, 2009; Pólya, 1990; Su, 2020) og Movshovits-Hadar (1988) útskýrir hvernig sérhver setning (það er stærðfræðiregla, e. theorem) í námsefni skólanna (ef til vill með örfáum undantekningum) eigi rót sína að rekja til undrunar: ef ekkert hefði einhvern tíma verið óvænt við einhverja setningu hefði stærðfræðingurinn sem uppgötvaði hana varla haft fyrir því að setja hana fram, enginn hefði haft áhuga á henni og setningin hefði ekki ratað inn í námsefni skóla um allan heim. Movshovits-Hadar (1988) telur, eins og Lockhart (2009), að í kennslubókum sé iðulega búið að loka á möguleika nemenda til þess að upplifa nokkra undrun eða tilfinningar gagnvart efninu – hið lifandi ferli hafi verið drepit og bútað niður í mola af dauðum staðreyndum. Ef fólk umgengst stærðfræði eins og safn af tilbúnum þekkingaratriðum og reikniaðferðum til þess að leggja á minnið án þess að reyna að skilja rökin að baki þeim, eða þá upplifa þá undrun sem felst í þeim, væri það í andstöðu við gildi fræðigreinarinnar og bæri ekki vott um umhyggju fyrir stærðfræði. Ólafur Páll Jónsson (2022) hefur bent á að kennslubækur almennt (hann tekur dæmi um líffræði) gefi oft þá mynd að námsefnið sé dauður listi af setningum um hvernig hlutirnir séu í stað þess að skoða þá, undrast, og gefa tilefni til að ræða saman um þá. Þá er vert að leggja áherslu á að eitt af því sem gerir stærðfræðiiðkun ánægjulega er vitsmunaleg áreynsla. Ef hún væri ekki krefjandi væri litla nautn að hafa af henni. Sú kennslufræðilega sýn sem lögð er til í þessari grein grundvallast á að stærðfræði eigi að vera vettvangur fyrir ástríðu og nautn. Raunar má segja um allar námsgreinar að þær séu verðugar sem skólagreinar því aðeins að í þeim felist meira en það sem blasir við án frekari athugana. Fræði og vísindi eru tilraun til að skynja og skilja heiminn betur. Ef stærðfræði væri ekkert annað en sjálfsagðir hlutir væri lítil ástæða til að kenna hana í skólum.

Mason (2008) og Mason og Hanna (2016) telja að hægt sé að kenna stærðfræði af umhyggju fyrir stærðfræði með því að kennarinn sé *stærðfræðilegur* (e. being mathematical) með nemendum og fyrir nemendur. Ég lít svo á, með Mason og Hanna (2016), að stærðfræðilegar athafnir séu hlutir eins og að alhæfa, sérhæfa, afhjúpa tengsl milli hugtaka, setja fram tilgátur og reyna að sannfæra sjálfan sig og aðra um tilgáturnar í stöðugri viðleitni til að gera röksemdirnar skýrari og skiljanlegar öðrum. Það að vera stærðfræðileg manneskja þýðir að hugsa og tala stærðfræðilega í samræmi við viðmið greinarinnar, að eiga í samskiptum til að lýsa hugsun og hugmyndum af nákvæmni, og að útskýra og krefja aðra um útskýringar til að gera hugmyndirnar ljósar. Að kenna stærðfræði út frá umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir greininni sjálfri felur þá í sér að sýna hugsun nemenda einlægán áhuga, hlúa að henni og byggja áfram á henni, í samræmi við viðmið stærðfræðinnar, en ekki í að bera svör nemenda saman við fyrirfram ákveðin rétt svör og útteila umbun og refsingu eftir því hve vel svarið passar við gefnu lausnirnar. Kennsla út frá umhyggju fyrir stærðfræðinámi felur í sér ástríðufullan áhuga á og umhyggju fyrir stærðfræðilegum spurningum, hugtökum og rannsóknaraðferðum og löngun til þess að nemendur upplifi sjálfir slíka umhyggju. Þannig eru nemendur leiddir inn í heim stærðfræðiiðkunar, og kennari og nemendur sýna stærðfræðinni umhyggju. Fyrir kennarann er markmiðið ekki einungis að nemendur fáist við stærðfræði, heldur vill hann að nemendur *vilji* fást við stærðfræði.

Í *Aðalnámskrá framhaldsskóla 2011* eru gefin upp hæfniviðmið fyrir stærðfræðikennslu. Viðmiðunum er skipt á fjögur þrep en á öllum þrepunum eru tilmæli um æskilega hæfni sem eru í góðu samræmi við lýsinguna í efnisgreininni hér að ofan. Til dæmis eigi nemendur að geta fylgt, skilið og beitt röksemdum, útskýrt hugmyndir sínar og verk skilmerkilega og beitt „gagnrýninni og skapandi hugsun og sýnt áráði, frumkvæði, innsæi og frumleika við lausnir“ (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2015, bls. 95). Í þessari námskrá eru ekki notuð hugtök sem vísa til viðhorfa eða tilfinninga en í eldri námskrá, sem var í gildi frá 1999 til 2011, er áhersla lögð á það sem kallað er „skemmtigildi“ stærðfræðinnar og þá ánægju sem getur falist í að „reyna vitsmuni sína í hæfilegum átökum við óþekktan hluti og því að sjá eitthvað snjallt eða formfagurt birtast með óvæntum hætti“ (Menntamálaráðuneytið, 1999).

Það er því ljóst að gildi stærðfræðinnar koma fram í námskrám og ljóst að mælst er til þess að þau séu í hávegum höfð í stærðfræðikennslu. Hins vegar er spurning hvort þau gildi verði útundan í túlkun kennara og skólástjórnenda þegar til kastanna kemur og mun meira sé hugað að því að „fara yfir“ þau stærðfræðilegu efnisatriði sem talin eru upp í námskrám og í allri þeirri viðleitni til þess að gefa nemendum einkunnir, eins og lýst er í kaflanum um rannsóknir á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum. Auk þess eru þessi háleitu fræðilegu markmið ekki endilega það sem er nemendum efst í huga – fyrir þá er skólaganga tengdari jarðbundnari markmiðum, eins og að útskrifast og öðlast þekkingu sem gagnast með beinum hætti, eins og rætt verður nánar í næsta undirkafla.

## Umhyggja fyrir samfélagi og skiptagildi og notagildi stærðfræði

Hugmynd Watson (2021) er að umhyggja fyrir stærðfræðinámi sameini umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir stærðfræði. Hún vekur líka máls á að kennsla á sér stað í tilteknu samfélagi og líka skipti máli að kennslan beri vott um umhyggju fyrir því samfélagi, og stingur upp á að gagnlegt gæti verið að bæta við umhyggju fyrir samfélaginu sem vídd í umhyggju fyrir stærðfræðinámi. Í því felst þá að huga að áhrifum kennsluhátta í stærðfræði á samfélagið í kennslustofunni, í skólanum, og hið víðara samfélag. Watson setur ekki fram kenningu um umhyggju fyrir samfélagi og það verður ekki heldur gert hér, nema í örstuttu máli, því ljóst ætti að vera að fólk hefur misjafnar skoðanir á í hverju slík umhyggja felst. Út frá umfjöllun um hlutverk prófa má nefna tvo andstæða póla. Annars vegar er það sem ég mun nefna íhaldssamt sjónarmið; að próf séu meðal tækja samfélagsins til að finna hverjum og einum viðeigandi hlutverk þar sem einstaklingurinn fær að njóta sinna hæfileika og gefa af sér í samfélaginu. Tíma og orku einstaklingsins sem og kennara sé þá ekki sóað í óþarfa erfiði við nám í greinum sem hann hefur litla hæfileika til. Það sýni þá umhyggju fyrir samfélaginu öllu að hafa nægilega mörg og vönduð próf til að byggja á í þessu ferli. Hinn pólinn er frjálsslyndari; að allir einstaklingar eigi rétt á að læra hvað sem er og að það sé ekki í eðli námsgreina að sumir geti lært þær en aðrir ekki. Litið sé svo á að hver manneskja sé ekki fyrirfram gefin stærð heldur frjáls og stöðugt í mótun um leið og viðurkennt væri að aðstæður fólks, til dæmis út frá stétt, uppruna og líkamsgerð, eru ólíkar og hafa áhrif á gengi í prófum. Út frá þessum pól væri ekki réttmætt hlutverk skóla að finna hverjum stað á sinni hillu heldur væri umhyggja sýnd með því að draga sem mest úr mikilvægi prófa fyrir slíka flokkun. Ég staðset sjálfan mig nálægt frjálsslyndari pólnum.

Nemendur á ótal námsleiðum og námsstigum verða að sýna fram á þekkingu í stærðfræði til þess að ljúka skilgreindum gráðum og prófum og fá skírteini, eða koma til greina sem starfskraftar í tiltekna stöður. Þannig hefur stærðfræði *skiptagildi* (e. exchange value). Hliðstætt við vörur sem ganga kaupum og solum er skiptagildi stærðfræðinnar iðulega réttlætt út frá *notagildi* (e. use value) hennar. Hugtökin skiptagildi og notagildi er hægt að rekja til fornaldar því Aristóteles mun hafa bent á að skór hefðu bæði gildi í sjálfu sér (til að hafa á fótum) en líka sem hlutur sem hægt er að *skipta á fyrir eitthvað annað* (Hermann, 2021). Venjulega er þó vísað til notkunar Marx (1867/1990) á þessum hugtökum í greiningu á kaupum og sölu á vörum í kapítalísku hagkerfi. Samkvæmt Marx er vara efnislegur hlutur sem uppfyllir mannlegar þarfir, hvort sem þær þarfir eru líkamlegar (eins og þörf fyrir fæði, klæði og húsnæði) eða andlegar (eins og þörf fyrir afþreyingu, nautn eða lífsfyllingu), og þessi nytsemi er notagildi hlutarins (Marx, 1867/1990, bls. 125–126). Marx segir að hver hlutur geti haft óteljandi mismunandi notagildi en auk þess hafi hann skiptagildi – sem sé hægt að magnbinda og bera saman við aðrar vörur, og þar með eiga í viðskiptum með þær. Þessar hugmyndir hafa verið yfirfærðar á óefnislega hluti eins og menntun almennt og þar með talið á stærðfræði í skólum. Þá er litið svo á að meginhlutverk skóla sé að útdeila og skrásetja einkunnir og staðfestingar á að einhverjum hluta formlegs náms sé lokið, svo að skólinn og aðrar stofnanir og aðilar samfélagsins geti metið virði nemenda og tekið ákvarðanir um framtíð þeirra (Cabral og Baldino, 2019; Vinner, 1997; Williams, 2012). Í þessu felst skiptagildi stærðfræðinnar. Fólk getur þannig safnað sér auðmagni með því að ljúka einingum og prófum í stærðfræði ef litið er svo á, eins og Bourdieu (til dæmis 1989), að auðmagn felist ekki aðeins í fjármunum heldur geti það falist í þekkingu, menntun, eða öðrum félagslega viðurkenndum verðmætum. Lykilatriði í kenningu hans er að mögulegt sé að umbreyta einni tegund af auðmagni yfir í aðra tegund. Einkunnir og prófgráður virka þá eins og gjaldmiðill, þar sem þær opna dyr að mörgum leiðum í námi og starfi og geta veitt virðingu og völd í samfélaginu

(Williams, 2012). Það að kennari ákvarði einkunnir nemenda í umboði skóla hefur því umtalsverðar afleiðingar fyrir námshópinn (bekkinn), skólann og allt samfélagið.

Í námskrám og stefnuritum kemur fram að stærðfræðipækking veiti fólki aukinn skilning og stjórn yfir aðstæðum sínum, samfélagi og náttúru, og feli í sér mætti (e. potential) til þess að styðja við tækniþróun og auka hagvöxt. Þessi notagildi skarast að einhverju leyti við gildi stærðfræðinnar sem lýst var í kaflanum á undan út frá sjónarmiðum innan greinarinnar sjálfar, það er að segja stærðfræði sem lifandi rannsókn á eðli hugtaka með rökvísina eina að vopni. Það er þó ekki augljóst hvernig þessari skörun er háttað eða hvert eðli notagildis stærðfræðinnar er í þessum hagnýtingarskilningi (sjá til dæmis Wigner, 1960; Priest, 2022). Innan stærðfræðimenntunar eru gagnrýnar raddir sem telja gagnsemi skólastærðfræði mjög orðum aukna og þar með að skiptagildi stærðfræðinnar sé í raun og veru að litlu leyti réttlætandi út frá notagildi hennar (til dæmis Cabral og Baldino, 2019; Dowling, 1998; Pais, 2013). Þessu til stuðnings má nefna rannsóknir sem benda til þess að sjaldgæft sé að fólk nýti sér stærðfræðipækkingu í sínu lífi að neinu marki, hvorki í vinnu né utan hennar, sér í lagi ekki námsefni sem kennt er eftir fyrstu bekkni grunnskóla (sjá til dæmis Hoyles o.fl., 2010). Annað fræðafólk hefur nýlega hafið umræðu um mögulega skaðsemi stærðfræðinnar og skaðsemi þess að kenna stærðfræði, og leggur til að stærðfræðikennarar hugsi um kennsluna sem siðferðislegt úrlausnarefni í því ljósi (til dæmis Abtahi, 2022; Ernest, 2018). Í þeim skrifum er bæði bent á mismunun sem hlýst af skiptagildinu en líka á að stærðfræði sé notuð beint til að þróa kerfi og hluti sem hafa illan tilgang, auk þess sem stærðfræði hafi í för með sér tækisbyggju (e. instrumentalism), þar sem heimurinn er smættaður niður í tölur og töluleg gögn, og fái óhóflega mikið vægi í samfélagsumræðu. Einkunnakerfið sjálft er dæmi um slíkt kerfi. Tilgangur minn hér er ekki að halda því fram að stærðfræði hafi ekki notagildi fyrir samfélagið í heild heldur að benda á að þau dæmi um notagildi sem nefnd eru fremst í þessari efnisgrein eru fjarri því námsefni sem ætlast er til að nemendur læri í framhaldsskólum. Til þess að hafa umtalsvert gagn af hugtökum eins og deildun og heildun við „raunveruleg verkefni“ þarf miklu meiri þekkingu en hægt er að ætlast til að nemendur öðlist í framhaldsskólum, auk þess sem hlutfallslega fáir nemendur munu nokkurn tíma nýta sér hana á þennan beina hátt eftir að námi lýkur. Niðurstaða mín af þessu er að það sé ekki endilega vænlegt fyrir kennara að hugsa notagildi stærðfræðinnar með vísan í dæmi um hagnýtingu í fjarlægri framtíð nemenda. Ég sting því upp á að líta á skemmtun, ánægju og nautn sem notagildi í samræmi við orð Marx (1867/1990, bls. 125) um að það skipti ekki máli um þarfirnar sem hlutur uppfylli hvort eðli þarfanna eigi uppruna „í maganum eða ímynduninni“. Í stærðfræði má þá líta á notagildi í ætt við þá beinu nautn sem hægt er að upplifa þegar við skiljum röklegt samhengi hluta, finnum lausnir á flóknum verkefnum eða sjáum nýja fleti á hugmyndum um (til dæmis) fjölda, rými, form og vensl. Þetta mætti kalla innra gildi stærðfræðinnar. Þegar öllu er á botninn hvolft er þó aðalatriðið í greinarmuninum á notagildi og skiptagildi að fyrirbæri getur haft gildi í sjálfu sér (notagildi) og gildi til að skipta á því fyrir eitthvað annað.

Munurinn á skiptagildi og notagildi í þessum skilningi getur skapað togstreitu. Til dæmis getur nemandi tjáð þörf fyrir skiptagildi stærðfræðinnar (hann þráir að ná prófum, eða jafnvel að fá háa einkunn á þeim) og kennarinn getur skynjað þá þörf og viljað hjálpa nemandanum til þess. Þá getur orðið árekstur við notagildið (nemandinn stenst prófið en þekkingin á stærðfræði er svo lítil að notagildið er lítið, hún veitir engan skilning á eðli hluta, mætti til að hafa áhrif eða nautn). Við getum líka orðað það sem svo að umhyggjan gagnvart nemandanum takist á við umhyggju fyrir stærðfræði (gildi stærðfræðinnar um ljóst röklegt samhengi hluta eru látin lönd og leið), sem geri umhyggju fyrir stærðfræðinámi ómögulega. Hér er rétt að ítreka að skiptagildi er oft réttlætt út frá hugsanlegu notagildi, og það birtist glögglega hér: Gildi stærðfræðinnar í skólakerfinu er réttlætt með því að hún hafi mikið notagildi, en notunum er hins vegar alltaf slegið á frest. Nemandinn heyrir ídulega að stærðfræðin verði gagnleg seinna þó að hún hafi lítið gildi fyrir hann hér og nú. Ég mun líta á notagildi í þessum skilningi – ekki sem hugsanlegt síðar heldur hér og nú.

## Umhyggja fyrir stærðfræðinámi

Umhyggja fyrir stærðfræðinámi eins og ég skilgreini hana í þessari grein hefur þrjár hliðar; umhyggju fyrir stærðfræði, umhyggju fyrir nemendum og umhyggju fyrir samfélaginu. Umhyggja fyrir stærðfræðinámi myndar fræðilega linsu greinarinnar. Þar með er ekki sagt að ekki væri hægt að greina þau gögn sem liggja til grundvallar út frá öðrum fræðilegum sjónarmiðum, svo sem sálfræðilegum námskenningum eða félagslegum kenningum.

Umhyggja fyrir stærðfræðinámi felur í sér að bjóða nemendum velkomna í samfélag stærðfræðinga og krefst þess að kennarinn veiti hugsun og hugmyndum nemandanna fulla athygli og virðingu, þar sem hann reynir að skilja hvernig nemandinn skilur stærðfræðina. Það togar í umhyggjusaman kennara að hjálpa nemendum sínum en stærðfræðikennari sem hefur umhyggju fyrir stærðfræðinámi að leiðarljósi styður nemendum sína einungis upp að því marki sem þeir þurfa til að geta tekist á við krefjandi verkefni. Hann hjálpar þeim ekki að komast hjá því að takast á við verkefnið. Hann leggur áherslu umfram allt á að viðhalda tengslum og samskiptum auk þess að virða stærðfræðilegar röksemdir og leit að sannleika og skilningi (notagildi), umfram markmið um að framleiða svör við stöðluðum dæmum og árangur á prófum (skiptagildi). Umhyggja fyrir stærðfræðinámi felst í að beina ástríðufullri athygli á stærðfræðina, þar sem kennarinn kemur ferskur að námsefninu og sér það með nemendum í stað þess að sýna nemendum námsefnið, þannig að nemendur upplifi notagildi stærðfræðinnar en sjái skiptagildi hennar í gagnrýnu ljósi.

#### Rannsóknir að innan

Fyrir þessa rannsókn tók ég saman *atvikasögur* (e. accounts) sem tengjast prófum og annarri einkunnagjöf úr minni eigin kennslu í framhaldsskóla á árunum 1999–2007. Ég stýðst við nálgun sem Mason (1998, 2002) hefur lýst og nefnir *rannsókn að innan* (e. research from the inside). Í rannsóknunum að innan er unnið út frá stuttum lýsandi frásögnum af atvikum sem rannsakandi hefur tekið sérstaklega eftir og skráð, atvikum sem hafa reynst verðug eftirtektar (fyrir rannsakandann). Atvikasögurnar sem ég hef safnað hafa að minnsta kosti haft nógu mikil áhrif á mig til að ég mundi eftir þeim og fann hjá mér þörf til þess að skrá og hugsa um þau. Ég skræði oft hjá mér atvikin eins og þau blöstu við mér en einnig tilfinningar sem ég upplifði. Réttlætningar, gildisdómar eða útskýringar eru hins vegar ekki hluti af frásögnunum. Þær eru ekki hugsaðar sem áreiðanleg empírísk gögn um það sem raunverulega gerðist heldur eru þær fyrst og fremst tæki til þess að ræða og hugsa út frá um eðli kennslu og náms. Þær eiga að gera öðrum kleift að sjá atvikin ljóslifandi fyrir sér og máta við eigin reynslu. Öðrum er því boðið að tengja við söguna og lesendur í svipuðum sporum ættu jafnvel að geta kallað fram svipaðar sögur sjálfir. Frásagnirnar eiga helst að tala svo til lesanda að hann geti sagt: „Þetta minnir mig á ...“ en þær má líka hugsa sem hugartilraunir. Þær eiga með öðrum orðum að vera að einhverju leyti dæmigerðar fremur en frásagnir af óvenjulegum atvikum. Að því leyti er þessi rannsókn nær því að vera heimspekilegs eðlis heldur en empírísk rannsókn.

Gildi slíkra frásagna felst fyrst og fremst í að þær eru nátengdar starfsvettvangi og því sem raunverulega gerist og hafa merkingu fyrir kennara og rannsakendur. Greining á þeim ætti því að varpa ljósi á prófadrifna stærðfræðikennslu út frá sjónarmiði kennara sem vill vinna í anda umhyggju fyrir stærðfræðinámi. Gögn sem ytri rannsakendur safna eru yfirleitt af öðru tagi og markast til dæmis meira af því sem áhugi rannsakendanna beinist að fremur en þeim atvikum sem fá kennara til að ígrunda starf sitt eða taka ákvarðanir um kennslu. Í hefðbundnum rannsóknunum á kennarastarfinu en þannig oftast litið á kennara sem viðföng (e. objects) en ekki sem virka þátttakendur í framvindu rannsóknar eða túlkun niðurstaðna. Í rannsókn að innan er kennarinn líka rannsakandi; hann ákveður hverjar spurningarnar eru og hvaða fyrirbæri eru tekin til skoðunar. Það er ekki hægt að sjá fyrir hvort atvikasögur mínar (eða hvers tiltekna rannsakanda sem rannsakar að innan) nái að hræra við tilteknum lesanda en fyrir þá mögulegu lesendur, sem kannast við svipuð atvik úr eigin kennslu eða sem fræðilega möguleika, þá gefa þær gott tækifæri til ígrundunar, gagnrýni og þess að taka nýjar ákvarðanir um kennslu eða að sjá kennslu í nýju ljósi. Að ýmsu leyti kann þessi lýsing að minna á aðferðir starfendarannsókna (e. action research), en hafa ber í huga að þessi grein er skrifuð löngu eftir að gögnunum var safnað og rannsóknin var ekki skipulagt ferli sem miðaði að þróun minna eigin starfshátta.

Í þessari grein leita ég merkingar atvikasagnanna gegnum linsu umhyggju fyrir stærðfræðinámi. Í leiðinni afhjúpast ýmsar forsendur eða vanamynstur sem höfðu áhrif á það sem ég gerði og hugsaði og aðrir gætu kannast við (eða hafnað sem möguleika) úr sínum eigin merkingarheimi. Ég held því ekki fram að atvikin hafi raunverulega gerst nákvæmlega eins og ég segi frá þeim, heldur er markmiðið að frásagnirnar rími nógu vel við reynsluheim lesanda að honum finnist eins og þær veruð raunverulegar. Lesandi ætti að máta sögurnar við eigin reynslu og meta hvort þær kallist á við hana, og meta í leiðinni hvort greiningartækið varpi gagnlegu ljósi á hana.

## Atvikasögur og túlkun þeirra í ljósi umhyggju

Á eftir fara átta atvikasögur ásamt greiningu út frá umhyggju fyrir stærðfræðinámi. Í lokin eru svo dregnar saman ályktanir.

### Saga 1: Kemur þetta á prófi?

Ég stóð við töfluna og var að tala við nemendahópinn um spurningu sem mér fannst áhugaverð og hafði komið fram í einhverju verkefni. Þá spurði einn nemandi: „Kemur þetta á prófi?“ Ég vissi að spurning mín var erfiðari en svo að ég hefði sett hana á próf fyrir þennan nemendahóp en ég taldi hana viðeigandi og stærðfræðilega verðuga. Þegar nemandinn spurði að þessu greip mig líkamleg tilfinning sem erfitt er að lýsa en gæti verið skyld djúpum vonbrigðum. Ég svaraði því að þetta tiltekna dæmi væri „sennilega aðeins erfiðara en dæmin sem koma á prófinu“, vegna þess að ég hafði þá meðvituðu stefnu að svara þessari spurningu alltaf heiðarlega og án útúrsmúninga. Þá spurði nemandinn, með hækkaðri röddu: „Af hverju ertu þá að kenna okkur þetta?“

Orð nemandans, „kemur þetta á prófi?“ og „af hverju ertu þá að kenna okkur þetta?“, eru til marks um þörf nemandans til að ná prófinu og fela í sér viðurkenningu á skiptagildi greinarinnar en þau má líka túlka sem höfnun á notagildi hennar – að inntak hennar skipti í sjálfu sér ekki máli nema til þess að ná prófum og nemandinn sér ekki að hann geti haft not eða nautn af efninu. Ef til vill treystir nemandinn því að námsefni stærðfræðinnar muni almennt hafa notagildi í framtíðinni en þá væri ekki um að ræða notagildið hér og nú. Með því að horfa framhjá gildum greinarinnar má líta svo á að nemandinn sýni ekki umhyggju fyrir stærðfræði.

Með því að ég hlustaði á nemandann og svaraði honum heiðarlega má segja að ég hafi veitt honum athygli, og sýnt að þarfir hans skiptu mig máli. Gegn því forgangsatríði nemandans að ná prófum en eyða ekki orku í eitthvað sem muni hugsanlega ekki hjálpa honum að ná prófum kemur þó löngun mín sem kennara að nemandinn njóti þess að fást við stærðfræði og glíma við stærðfræðilegar áskoranir. Í hinu smærra samhengi gæti markmið mitt, með því að leggja tiltekna spurningu fyrir nemanda, verið að nemandinn tæki eftir eða myndaði tiltekna tengingu milli stærðfræðilegra hugtaka eða styrkti rökfimi sína, jafnvel að hann upplifði undrun. Markmið nemandans á þeim tímapunkti kann þó að vera að leggja á minnið aðferð sem muni hjálpa honum að ná prófi í áfanganum. Nemendur vilja að minnsta kosti að kennarinn kenni þeim það sem þeir þurfa að kunna til að ná prófi. Vandinn er að samhengið milli verkefna sem nauðsynlegt er að vinna til að öðlast nauðsynlegan skilning (til árangurs á prófum) getur verið nemendum hulið – og það getur verið ómögulegt að gera það ljóst fyrr en eftir á. Í slíkum aðstæðum er því lykilatriði að komist hafi á traust milli nemenda og kennara um að efni og verkefni sem kennarinn leggur fyrir muni gagnast nemendum til árangurs í náminu. Í þessu tilviki virðist nærtækasta túlkunin sú að slíkt traust hafi ekki myndast.

Þau djúpu vonbrigði sem ég lýsi í sögunni túlka ég núna þannig sem viðbrögð við röskun á eða erfiðleikum við að ná eða viðhalda umhyggjutengslum. Sem kennari hef ég þörf fyrir hvoru tveggja, að nemendur nái tilskildum prófum en líka að þeir læri stærðfræði. Einnig hef ég þörf fyrir að nemandinn sýni með einhverjum hætti að umhyggja mín hafi verið veitt, með því að takast á við verkefni, taka þátt í samræðunni, skoða stærðfræðilegar spurningar og fyrirbæri með mér, eins og ég hef boðið honum til. Stundum er sagt að kennari ætti ekki að taka hegðun nemenda

„persónulega“, en þá er verið að gera lítið úr nauðsynlegum umhyggjutengslum fyrir stærðfræðinámi og eðlilegra þarfa kennarans fyrir að nemendur rækti sína hlið umhyggjutengslanna. Þetta eru þó háskalegar slóðir og mikilvægt að hér er ekki verið að ásaka nemandann um siðferðisbrest í skilningi umhyggjusíðfræðinnar. Öllu heldur er það prófakerfið sjálft, prófadrifin kennsla, sem gerir umhyggju fyrir stærðfræðinámi hartnær ómögulega

## Saga 2: Af hverju kunna nemendur ekki neitt?

Ég var að fara yfir úrlausnir á lokaprófum útskriftarnemenda úr framhaldsskóla. Fyrir dæmi skipti ég fyrirgjöfinni skipulega niður, gaf mismunandi mörg stig eftir því hve langt nemandi hafði komist með dæmið. Yfir mig helltust vonbrigði með lausnirnar, mér fannst sem langflestir nemendur kynnu einfaldlega ekki neitt – eða ekkert sem máli skipti. Þeir söfnuðu saman stigum með því að gera einhvers konar lélegar eftirlíkingar af lausnum, nánast falsanir. Mér fannst sem tíma mínum og nemenda hefði verið eytt til einskis.

Hvað voru nemendur að hugsa? Voru þeir í raun og veru að glíma við stærðfræðiverkefni? Eða voru þeir að reyna að rifja upp og fara eftir forskriftum sem höfðu enga merkingu fyrir þeim? Þessar spurningar ollu mér hugarangri. Hvað var ég að reyna að fá fram? Var ég að reyna að skilja hugsun nemenda? Var kannski hægt að spyrja á annan hátt? Voru nemendur einfaldlega ekki vanir því að vera krafðir um skilning á prófum? Allar þessar spurningar eru til marks um löngun mína til að veita nemendum athygli og skilja hugsun þeirra, sem eru grunnforsendur umhyggjutengsla. Á þessum tímamarki var það þó of seint. Það er ekki hægt að veita fólki fulla athygli nema í nema í einhvers konar samskiptum þar sem fólk tjáir sig til skiptis. Hér sat ég hins vegar við endapunkt – það yrði engin frekari samræða og umhyggjutengsl því útilokuð.

Út frá sjónarmiði nemenda mætti ímynda sér þessi viðbrögð við mínum spurningum: „Ef þú hefðir viljað fá annars konar svör (réttari, að þínu mati) hefðirðu átt að þjálf okkur í að gefa slík svör við dæmum eins og komu á prófinu – því okkar hlutverk er að endurtaka það sem þú kenndir okkur að gera, eins vel og við getum.“ Þetta svar væri eðlilegt í heimi prófadrifinnar kennslu en ber ekki merki umhyggju fyrir stærðfræðinámi vegna þess að hér er engin virðing fyrir gildum stærðfræðinnar um röksemdir og leit að tengslum milli hugtaka. Í mínum huga hafði ég reynt að þjálf nemendur í að setja fram svör sem byggja á röksemdum og tengslum milli hugtaka en eðli málsins samkvæmt er ekki hægt að þjálf það þannig að um hreina endurtekningu verði að ræða, eins og kemur fram í fræðslutogstreitunni (Brousseau, 1997).

## Saga 3: Af hverju fæ ég ekki fullt fyrir þetta?

Eftir að prófurlausnum var skilað, með einkunnum til nemenda, kemur nemandi til mín og spyr hvers vegna hún hafi ekki fengið fullt hús stiga fyrir lausn á tilteknu dæmi. Ég segi að það vanti rökstuðning. Hún segir að það standi hvergi á prófinu að rökstuðnings sé krafist (það stóð: „Svar án útreikninga gefur ekkert stig“). Auk þess hafi ég gert dæmið svona á töflunni. Lausn hennar leit nokkurn veginn út eins og það sem ég gæti hafa skrifað á töfluna, en hjá henni vantaði skýringarnar sem á undan komu sem ég gæti hafa látið frá mér munnlega meðan ég reiknaði á töfluna.

Samtal okkar var ekki um stærðfræði – og það var heldur ekki um stærðfræðinámi. Það var ekki um hvernig nemandinn gæti bætt skilning sinn, eða hvernig ég gæti bætt kennsluna. Vissulega hefði samtalið getað snúist um það – nemandinn hefði ef til vill getað nálgast námið á gagnlegri hátt og ég hefði getað gefið skýrari viðmið og fyrirmyndir um hvað væri nauðsynlegur og nægjanlegur stærðfræðilegur rökstuðningur. Í prófadrifinni kennslu er samt erfitt að stýra samtölum um prófurlausnir í þá átt – skiptagildið ríkir, notagildið víkur. Nemandinn hafði skrifað á blað runu af táknum sem hann taldi að myndi þóknast mér, og þar með skólanum og líklega foreldrum eða forráðamönnum. Hún gaf því þó engan gaum hvers vegna hún átti að skrifa þessi tákni á blaðið, fyrir henni höfðu þau enga merkingu og því hafði hún ekki upplifað neina stærðfræðilega nautn og myndi ekki hafa af þessari stærðfræði nein not. Því var ekki um neina umhyggju fyrir stærðfræði að ræða.

Getur verið að samtalið hafi verið hluti af umhyggjutengslum? Ég held að ég hafi reynt að setja mig í spor nemandans, ég held að ég hafi skilið afstöðu hans, tilfinningar og þær þarfir sem hann tjáði – en ég var ekki tilbúinn að veita það sem beðið var um. Samskiptin er hægt túlka þannig að við höfum verið eins konar andstæðingar. Nemandinn var að berjast við mig um að fá fleiri stig – og ég barðist á móti. Ég taldi mikilvægara að viðhalda viðmiðum stærðfræðinnar en að mæta þörfum nemandans fyrir fleiri stig. Ég skráði ekki hjá mér framhald samræðunnar, og það má vel vera að ég hafi reynt að skýra mál mitt og sér í lagi lagt áherslu á að markmið nemandans ætti að vera að læra en ekki að hækka einkunnir. Við þessum skýringum hefði nemandinn getað svarað: „Af hverju ertu þá að setja fyrir þessi próf og gefa einkunnir fyrir, sem skipta mig máli?“

#### **Saga 4: Öll höfðu öll dæmin rétt**

Allir nemendur bekkjar höfðu skilað öllum heimaðæmunum réttum, á alveg sama hátt. Ég spurði nemendahópinn af hverju þetta gæti verið og fékk það svar að þeir höfðu skrifað lausnirnar upp hver eftir öðrum. Ég spurði þá af hverju – til hvers þeir hefðu gert það, og þeir svöruðu því til að enginn vildi taka á sig lægri einkunn en hinir, bara til að halda samviskunnri hreinni.

Samskiptin sem hér er lýst virðast benda til þess að umhyggjutengsl hafi verið milli mín og nemenda að því leyti að þeir treystu mér til þess að hlusta og skilja þeirra sjónarmið og taka þau alvarlega. Enda refsaði ég nemendum ekki fyrir, og má segja að með því hafi ég valið að rækta tengslin við nemendahópinn fremur en að „útdeila réttlæti“. Á móti kemur að líklegt er að hluti nemendahópsins hafi ekki notið þess að fást við stærðfræði í verkefninu og ekki er líklegt að nothæf þekking fái af því að skrifa upp lausnir annarra (þó það sé ef til vill mögulegt, ef nemandinn gerir það ekki hugsunarlaust).

Margs konar ástæður eru fyrir því að telja svindl á prófum ámælisvert í skilningi umhyggjusíðfræðinnar. Með því að svindla bregðast nemendur trausti kennara og grafa undan samskiptum þeirra á milli með óheiðarleika. Auk þess er hægt að líta á svindl sem merki um að umhyggju minni sem kennara hafi ekki verið svarað með þeim hætti að umhyggjan hafi verið viðurkennd, vegna þess að nemendur höfðu með þessu ekki gefið sig að náminu sjálfu, ekki tekist á við verkefni sem ég bauð þeim. Þeir völdu líka að meta skiptaverðmæti einkunna hærra en notagildi stærðfræðinnar.

Fyrir mér var þetta einhvers konar sannleiksatburður. Ég hafði sett nemendur í erfiða stöðu ef markmið mitt var að nemendur nytu og lærðu stærðfræði. Nemendur hafa ekki eingöngu það markmið að vinna að uppsöfnun skiptaverðmæta en engu að síður er það stór þáttur í þeirra skólalífi – eðlilega, í ljósi þess hve mikið vægi einkunnirnar hafa í skólanum og samfélaginu. Þeir eru settir í undarlega samkeppnisstöðu þegar þeir fá heimaverkefni sem hafa vægi í lokaekinn. Aðstæður þeirra eru misjafnar og í raun og veru ýmis grá svæði sem ekki er venja að taka með í einkunnareikninginn. Hvað ef foreldrar eða einkakennarar hjálpa sumum en ekki öðrum? Hvatt er til þess að nemendur hjálpist að, en samt eru þeir dæmdir sem einstaklingar, eiga að skrifa sínar eigin lausnir og einkunnirnar eru hærra metnar í skólanum heldur en óljós og vandmetinn skilningur.

#### **Saga 5: Hvernig eiga einkunnir að dreifast?**

- (a) Á kennarafundi var talað um að einkunnadreifing í eðlisfræði í ár væri óeðlileg, það hefðu of margir fengið of háa einkunn, og að dreifingin væri skökk. Það þurfi að skoða þetta mál.
- (b) Við yfirferð prófs var beðið með að ákvarða endanlega stigafjölda fyrir tiltekin verkefni, til að sjá hvað myndi henta til að fá eðlilega meðaleinkunn.

Þessar sögur sýna hvernig próf og einkunnir eru notaðar til að aðgreina og flokka nemendur. Fyrir mér voru þessi atvik einkum til að styðja þá tilfinningu mína að allt tal um að próf snerust um að meta þekkingu nemenda væri í ætt við yfirvarp til að fela raunverulegt hlutverk þeirra. Þau eru dæmi um orðræðu þar sem flokkunin birtist sem það mikilvægasta við próf, umfram til dæmis að

veita upplýsingar um þekkingu nemenda eða sem hugsanlegan þátt í að sýna umhyggju fyrir námi tiltekinna greina. Það, að búa til einkunnir til þess að fá út fyrirfram gefnar tölfræðistærðir, snýst um að viðhalda skiptagildi einkunna. Þessar sögur lýsa því orðræðu íhaldssamrar umhyggju fyrir samfélaginu þar sem nemendur eru smættaðir niður í sinn flokk miðað við hina (innan sama hóps og í samanburði við fyrri nemendahópa). Hin opna námsmatsspurning sem kennarar gætu spurt, ef þeir hefðu einlægan áhuga, „Hvernig skilur þú námsefnið?“, er víðs fjarri. Orðræðan og athafnirnar sem sögurnar lýsa draga úr gildi prófa sem samskiptaleiðar. „Við ætlum að meta þig, en við ætlum ekki að segja þér hvernig við förum að því“ gætu kennarar sagt nemendum, „þú færð eitt tækifæri og við ætlum að alhæfa um þig út frá því“ – en við kennarar segjum þetta reyndar ekki, vegna þess að það myndi grafa undan þeirri hugmynd að próf séu hlutlæg og marktæk. Ég sé þessa sögu líka til marks um brot á trausti, og þar með til að draga úr möguleikum á umhyggjutengslum. Nemendur geta ekki treyst því að einkunnagjöfin sé hugsuð til að mæta þeirra þörfum, því hún er það ekki í þessum tilfellum. Notagildi námsgreina og fræða er utan við umræðuna sem lýst er í þessari sögu – það sem öllu máli skiptir virðist vera að viðhalda ásýnd einkunnakerfisins, gangverki skiptagildisins.

### **Saga 6: En hvernig ætlarðu að prófa úr þessu?**

Ég kom inn í vinnuherbergi með hugmynd að efni fyrir nemendur sem ég hafði fengið og mér fannst frábær. Annar kennari leit á blaðið hjá mér og sagði: „Jú jú, þetta er mjög fint, en hvernig ætlarðu að prófa úr þessu?“

Hér hefur annar kennari í raun tekið sömu afstöðu og var lýst í sögu 1 (Kemur þetta á prófi): Það á að vera mjög náð samband milli þeirra tilteknu verkefna sem nemendur fást við í kennslustundum og þeirra tilteknu verkefna sem prófað er úr og einkunn gefin fyrir. Þar með útilokast þó sá möguleiki að nemendur geti haft gagn og gaman af að kljást við verkefni á opinn hátt, þar sem ekki er alveg ljóst hverjar lausnirnar eru og markmiðið ekki endilega að ná fullri stjórn á tilteknum þekkingaratriðum. Auðvelt er að gera mistök í stærðfræðilegum röksemdafærslum og það tekur langan tíma að ná verulegri færni í þeim. Að takmarka verkefni nemenda við þau sem öruggt er að hægt sé að gefa einkunn fyrir ber ekki vitni um umhyggju fyrir stærðfræði ef við lítum á stærðfræði sem samræðu og sannleiksleit, víxlverkun tilgátusmiða og tilrauna til að sanna og sannfæra. Slík takmörkun er hins vegar í samræmi við þá sýn að stærðfræði sé dautt safn af tilbúnum þekkingaratriðum og reikniaðferðum. Þetta er hins vegar klípa fyrir kennara sem ber umhyggju fyrir nemendum vegna þess að þeir vilja fá sem bestan undirbúning fyrir prófin.

### **Saga 7: Grátandi í símanum**

Síminn hringdi. Þetta var nemandi minn til þriggja ára, alltaf staðið sig mjög vel, sýnt efninu áhuga og skilað góðum verkum og alltaf fengið háar einkunnir. Hún var að fara að útskrifast og hafði fengið að vita að hún fengi 6,0 í stúdentsprófseinkunn í stærðfræði, og grét í símann.

Ég komst í nokkuð tilfinningalegt uppnám við þetta símtal. Ég hafði á þessum tímapunkti þriggja ára reynslu af að kenna þessum nemanda sem hafði fengið 9 og 10 á mörgum prófum, lokaprófum og hlutaprófum, og hafði að mínu mati „unnið sér inn“ fyrir að minnsta kosti 9. Ég fann til með henni. Ég skynjaði að henni fannst hún ekki hafa verið metin að verðleikum. Hún hafði sýnt mér mörgum sinnum að hún hafði góð tækni á því stærðfræðilega inntaki og á þeim stærðfræðilegu röksemdafærslum sem ætlast var til að hún tileinkaði sér. Löngun mín var að leiðrétta þessa einkunn, breyta henni í kerfinu framhjá frammistöðunni á þessu tiltekna prófi. Af hverju ætti ég ekki að geta skráð einkunn sem væri mitt faglega mat? Ég leitaði prófið uppi og hækkaði einkunnina upp í 6,5 sem var sú einkunn sem færð var í stúdentskírteini þessa nemanda. Ég taldi mér ekki mögulegt að breyta einkunninni meira vegna þess að þetta var loka-einkunn fyrir próf sem utanaðkomandi prófdómari hafði farið yfir og vottað. Myndi ég ekki brjóta á réttindum annarra nemenda með slíkri sérmeðferð, og grafa undan trúverðuleika einkunnakerfisins?

Ég hef síðar séð eftir því að hafa ekki gripið til róttækari ráða og farið fram á og reynt að sannfæra mína yfirmenn um að þessari einkunn yrði breytt (eða hreinlega breyta henni með leynd). Ég hefði

þá reynt að mæta þörfum nemanda míns (því einkunnir hafa áhrif á sjálfsmynd nemenda). Ég hefði þá líka raunverulega virt okkar fyrri samskipti, og það sem ég hafði kynnst af nemandanum gegnum þau. Ég hefði getað hafið samræðu við mína yfirmenn um þessa niðurstöðu og fært rök fyrir því að einkunnin væri óréttmæt – hún væri röng ályktun um árangur þessa nemanda og aðrir sem myndu taka ákvarðanir út frá einkunninni myndu draga rangar ályktanir um nemandann.

Cabral og Baldino (2019) benda á að venjulega þurfi kennarar sem gefa einkunnir ekki að horfast í augu við afleiðingar gerða sinna, sem oft séu afdrifaríkar, vegna þess að litið sé svo á að einkunnirnar séu áreiðanlegar og réttmætar mælingar. „Nemendur sjá sjálfir um að fella sig.“

### **Saga 8: Skipt á léttari braut**

Ég spurði nemanda hvers vegna hún hefði valið tiltekna braut eftir fyrsta árið í framhaldsskóla. Hún hafði valið braut þar sem lítil áhersla var á stærðfræði en mér fannst hún eiga vel heima í stærðfræði. Hún sagðist hafa valið brautina vegna þess að einkunnir á henni væru hærri og hún vildi ekki hætta á að fá lágur einkunnir í stærðfræði sem myndu draga niður meðaleinkunnina. Ég fann fyrir vonbrigðum.

Ég veitti nemandanum athygli – ég hafði áhuga á að vita hvaða braut hún hafði valið og á þeim ástæðum sem lágu að baki ákvörðun hennar. Ég fékk tilfinningu fyrir að hafa mistekist að vekja með henni nautn eða tilfinningu fyrir því að eiga heima í stærðfræði. Hér var þó of seint fyrir mig að breyta því. Ég gat ekki hjálpað henni. Hér má auðvitað spyrja hvort um vandamál hafi verið að ræða eða nokkur þörf fyrir hjálp. Ekkert segir að þessi manneskja geti ekki orðið hamingjusöm þó hún hafi „valið sig frá stærðfræði“! Það að ótti við próf hafi ráðið úrslitum bendir þó til þess að skiptagildi námsgreina hafi meiri áhrif en notagildi þeirra, sér í lagi að skiptagildi stærðfræðinnar vegi of þungt í menningu skólans og samfélaginu öllu. Slík menning er ekki til vitnis um umhyggju fyrir samfélaginu. Nemandinn missti af tækifærum til að nota og njóta stærðfræði. Stærðfræði missti manneskju úr samfélagi sínu, manneskju sem hefði getað lagt eitthvað af mörkum fyrir aðra til að nýta og njóta stærðfræði.

### **Umræða og lokaorð**

Ég hef lýst og greint átta atvikasögur úr minni eigin kennslu með það fyrir augum að auka skilning minn og annarra á hvernig það var fyrir mig, eða aðra kennara sem deila skyldri sýn á stærðfræðikennslu, að kenna stærðfræði í prófadrifnu kennslufyrirkomulagi og hvernig slík kennsla fer saman við kenningarlegt sjónarhorn umhyggju fyrir stærðfræðinámi. Áhersla mín er að skoða prófadrifna kennslu út frá tilteknu siðferðislegu sjónarhorni og tilteknum gildum sem fela meðal annars í sér tiltekna samfélagssýn. Með þessari nálgun fæst þannig (hluti af) mynd af hvernig er að vera kennari – í hárra upplausn. Hún dregur fram og gefur innsýn í sumar mikilvægar siðferðislegar spurningar sem kennari svarar óhjákvæmilega í starfi sínu, hvort sem hann veltir þeim fyrir sér eða ekki. Hún dregur einnig fram forsendur sem kennari gengur út frá (eða ekki) í sínu starfi, gefur tilefni til ígrundunar um þær og aðrir geta speglað sig í minni greiningu. Í þessu felst framlag og styrkleiki þessarar heimspekilegu nálgunar. Ég get hins vegar ekkert fullyrt um hvernig kennarar almennt hugsa starf sitt í prófadrifnu umhverfi og ég get ekkert sagt um áhrif á árangur af námi eða metið gæði kennslu. Þeir lesendur sem hafa allt aðra sýn á stærðfræðikennslu og samfélag munu ef til vill hafa takmarkað gagn af rannsókninni, sem og þeir sem vilja fá tillögur að kerfislausnum.

Í sumum sögunum (1, 4, 7 og 8) kemur ljóslega fram viðleitni mín til þess að veita nemendum athygli og hlusta á þá, sem er í anda grunnhugmynda umhyggjusíðfræðinnar (Held, 2006; Noddings, 2012). Í öllum þessum sögum tjá nemendur mér að einkunnin sjálf skipti þá mestu máli, umfram til dæmis hvort þeir hafi ánægju eða not af náminu: þeir vilja fá að vita hvað kemur á prófinu, þeir vilja að tíma sé ekki varið í annað en það sem nýtist þeim á prófi, og þeir segja mér að þeir beiti hvaða leiðum sem er (meðal annars því að afrita lausnir annarra eða skipta um námsbraut) til að fá hærri einkunn, og að lágur einkunnir valdi þeim mjög miklu hugarangri og áhyggjum. Þetta er í samræmi við önnur skrif,

til dæmis Hafdísar Ingvarsdóttur (2018) og Ingólfs Gíslasonar og Berglindar Gísladóttur (2021) sem sýna að próf og einkunnir virðast nemendum efst í huga í tengslum við skólagöngu sína. Samkvæmt kenningum umhyggjusíðfræði Noddings (2012) er næsta skref í ferlinu, eftir að ég sem umhyggjugjafi hef reynt að skilja þarfir nemenda, að ég finni að það togi í mig að uppfylla þarfirnar og því næst að bregðast við til að reyna að mæta lögmætum þörfum og reyna að rækta umhyggjutengslin. Hér er nokkur vandi því það fylgir ekki alltaf sögunum hvað gerðist í framhaldinu og til lengri tíma. Þó er ljóst að ég hef fundið til löngunar að mæta þörfum nemenda því þetta eru allt atvik sem fengu mig til að skrásetja þau og brjóta heilann um hvað ég gæti gert til bóta. Viðbrögð mín, til dæmis að viðurkenna áhyggjur og viðbrögð nemenda, útskýra tilgang verkefna og endurskoða einkunnir, eru að einhverju leyti til marks um tilraunir til að mæta þörfum og rækta umhyggjutengslin. Tilefni allra samskipta sem lýst er í þessum fjórum sögum er samt einkunnagjöf en ekki stærðfræðinámi, það er að segja skiptagildi en ekki notagildi. Í mínum huga gat ég ekki mætt þessum þörfum nema með að hætta notkun prófa. Tilraunir mínar til þess eru utan ramma þessarar greinar, en mín ályktun í kennslu var að prófin hefðu aflagandi áhrif í að draga mig og nemendur mína frá stærðfræði, þar sem mér fannst þau setja bæði mig og stærðfræðina sem slíka í hlutverk andstæðinga nemenda. Út frá þeim kenningarramma sem settur er fram hér þá sýna þessar fjórar sögur að prófin gerðu umhyggju fyrir stærðfræðinámi verulega erfiða.

Atvikasögur 1, 2 og 3 sýna tilfinningaleg tengsl mín og umhyggju fyrir fræðigreinininni sjálfri, og viðleitni mína til að hafa í heiðri gildi stærðfræðinnar um sannleiksleit og röksemdafærslur (Mason og Hanna, 2016). Ég vildi að nemendur glímdu við sannleiksleit og röksemdafærslur og nytu þess. Í þessum þremur sögum koma fram neikvæð tilfinningaleg viðbrögð mín, sem líta má á sem vonbrigði með að takast ekki að láta stærðfræði heilla nemendur, að fá þá til að vilja fást við stærðfræði vegna þeirrar beinu nautnar sem má af því hafa. Sögurnar þrjár fela í sér tjáningu nemenda á að einkunnir skipti þá meira máli heldur en stærðfræði – skiptagildið sé æðra notagildi. Hér getur kennari hæglega freistast til að dæma nemendur: Þá skortir áhuga, þeir eru latir, þeir vilja bara fá prófskírteinin án þess að hafa nokkuð fyrir hlutunum, og svo framvegis. Hann getur líka dæmt sjálfan sig: Bara ef ég væri skemmtilegri, hlýlegri, með betri verkefni eða glærur eða kennsluáferð – eða hann getur sætt sig við veruleikann: Svona er þetta bara, þetta er skólinn, engin ástæða til að taka þetta nærri sér, en það er að minnsta kosti einn möguleiki í viðbót: Kennarinn getur tekið gagnrýna afstöðu gagnvart einkunnakerfinu sjálfu, því út frá umhyggju fyrir stærðfræðinámi virðist ljóst að prófahaldið sjálft vann gegn því að nemendur vildu glíma við sannleiksleit og röksemdafærslur.

Í sögum 5 og 6 koma fram áhyggjur annarra kennara en mín af að uppfylla kröfur skólakerfisins og samfélagsins um mælanlegan árangur af kennslunni, á þann hátt að hver og einn fái réttmæta einkunn sem nota megi til að ákvarða innbyrðis röð og framtíð nemenda (Cabral og Baldino, 2019; Vinner, 1997). Það bendir til þess að umhyggja þeirra kennara fyrir samfélaginu sé nær íhaldssamari pólnum heldur en mín, og lík því sem lýst er í rannsóknnum bæði Laufeyjar Petreu (2015) og Elsu og Ingólfs Ásgeirs (2016). Sú samfélagslega sýn sem fylgir íhaldssamari pólnum felur í sér að nemendur keppi hver við annan um auðmagn, virðingu og völd og að verðleikar ráði um úrslit. Einkunnagjöf og umsýsla sé þá hluti af verðleikakerfinu. Ég vildi samt ekki vera í því hlutverki að dæma suma úr leik (með lágum einkunnum) á meðan ég lyfti öðrum áfram. Eins og ég sá það, og sé það enn, þá er óréttmætt að slakt gengi á skólaprófum loki aðgengi að frekara námi og tækifærum. Fyrir kennara eins og mig, sem fellst ekki á þá grunnforsendu kerfisins að ójöfnuður sé réttmætur, er erfitt að sýna samfélaginu umhyggju í prófadrifinni kennslu.

Af ofangreindum ályktunum má sjá í verki „þrefalda togstreitu“ kennarans sem vill sýna stærðfræðinámi umhyggju, þar er að segja, að gera allt í senn: Sýna nemendum umhyggju, sýna stærðfræðinni umhyggju og sýna samfélaginu umhyggju af frjálslyndu tagi innan samfélags þar sem íhaldssamari gerð af umhyggju fyrir samfélagi er ráðandi og skiptagildi og mælingar tengdar því eru ofarlega í huga kennara og nemenda.

Í öllum sögunum má sjá þann eiginleika prófa að þau loka á samræður og vinna þannig gegn ræktun umhyggjutengsla því þau byggja á gagnvirkri tjáningu (Held, 2006; Noddings 2012). Fyrirlagning

prófa og einkunnagjöf stuðlar að því að skiptagildið tekur yfir og rýrir skilyrði til þess að nemendur njóti þess að glíma við krefjandi verkefni með kennara og hvert öðru sem samherjar. Þegar nemendur og kennari eru í eins konar andstæðingshlutverki dregur úr trausti og þar með möguleikum mínum til að fá nemendur til að tjá hvað þeir eru í raun að hugsa um stærðfræði. Nemendur mínir sáu sjálfa sig ekki sem velkomna þátttakendur í samfélagi stærðfræðinga þegar þeir upplifðu einkunn sem dóm um að vera ekki þess verðugir. Þeir upplifðu mistök sem eitthvað sem þeir ættu ekki að gera sem þátttakendur í stærðfræði. Ég upplifði síðan áhugaleysi fyrir því sem ég hafði fram að færa, það er skort á umhyggju fyrir mér sem kennara (Hackenberg, 2005).

Þessi heimspekilega sjálfsrannsókn svarar ekki hinni mikilvægu spurningu sem vaknar í kjölfarið: „Hvað ber að gera“? Eins og ritrýnar greinarinnar hafa bent á eru til kennarar sem reyna að nota ekki próf til að drífa áfram kennsluna og þeir hafa fundið ýmsar skapandi lausnir sem minnka vægi prófa í námsmati. Sumir skólar hafa til dæmis yfirlýsta stefnu um að nota leiðsagnarmat eða leiðsagnarnám, sem er viðleitni til þess að losna undan prófadrifinni kennslu, og á þessum leiðum óska ég frekari rannsókna. Í því samhengi má nefna að gildandi aðalnámskrá kveður á um að fyrir hvern áfanga í framhaldsskóla skuli gefa lokavitnisburð „í heilum tölum á bilinu 1–10 eða í kerfi sem hægt er að tengja við það með skýrum hætti“ (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2015, bls. 59). Svo má velta fyrir sér hvernig það rímar við önnur orð í námskránni um að koma skuli til móts við ólíkar námsþarfir, nema að við túlkum það þannig að við komum til móts við ólíkar námsþarfir með því að fella nemendur og/eða beina þeim inn á tiltekna brautir út frá árangri á prófum, í anda íhaldssamrar umhyggju fyrir samfélaginu. Nýjar leiðir, eins og þær sem kenndar eru við leiðsagnarmat og leiðsagnarnám, eru „skaðaminnkandi“ og mikilvægar – en þær umbylta ekki kerfinu sem gengur fyrir einkunnum.

Hægt er að velta fyrir sér hvort aðstaða kennara yrði betri til að sýna umhyggju fyrir stærðfræðinámi en í núverandi kerfi ef samræmd lokapróf væru við lok framhaldsskóla. Kennarar og nemendur gætu þá verið samherjar og kennarar væru leystir undan því hlutverki að dæma nemendur. Á hinn bóginn yrðu slík próf mögulega mjög stýrandi og eðli slíkra prófa samkvæmt er hætt við að áherslan yrði á áreiðanleika mælinga og myndu prófin einkum snúast um „einföld viðfangsefni sem eru leyst með því að fylgja gefinni forskrift“ eins og flest stærðfræðipróf í framhaldsskólum eru (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Markmið þessarar greinar er ekki að leggja til neinar ákveðnar breytingar heldur að hvetja til ígrundunar: Það er mikilvægt að túlka heiminn áður en við breytum honum. Viljum við (samfélagið) raunverulegt jafnrétti til náms? Viljum við mismuna fólki eftir gengi á prófum – ítrekað, sjaldan eða aldrei? Í mínum huga þarf að taka hugmyndir um róttæka inngildinguna til skoðunar þar sem allar manneskjur hafa rétt til hvaða náms sem er, óháð fyrri einkunnum. Ég viðurkenni að hér er ég líklega í litlum minnihluta og flestir munu telja það óraunhæfa sýn, og ég reyni ekki að rökstyðja þessa afstöðu í þessari grein nema óbeint, með því að draga fram togstreitu sem kennarar og menntakerfið allt lendir í ef umhyggja fyrir stærðfræðinámi á að vera leiðarljós innan kerfis þar sem einkunnir ríkja.

Með því að gera kennslu og nám að stöðugri viðleitni til að hanna hlutlæg próf í þekkingaratriðum, sem nemendur svo keppast við að leysa með því að fylgja fyrirmælum og forskriftum án þess að hugsa um merkingu eða tilgang, svíkjum við bæði umhyggju fyrir stærðfræði og umhyggju fyrir nemendum. Við gefum þá mynd af stærðfræði að hún sé dauður listi af setningum um hvernig hlutirnir séu í stað þess að gera hana að rannsóknarefni og tilefni til að undrast. Þar með verður í raun ekkert um að tala í stærðfræði frekar en í þeim kennslubókum sem Ólafur Páll Jónsson lýsir (2022). Eins og Hafdís Ingvarsdóttir (2018) bendir á er hin sterka hlutaprófahefð til marks um vantraust á nemendum, sem þurfi stöðugt eftirlit. Sífelld einkunnagjöf í skólum er þannig birtingarmynd þess hvernig samfélag okkar beitir fólk ögun í þágu markmiða eins og hagkvæmni og hagsældar. Slík agakerfi ganga oft út á talningar og mælingar og hafa yfirbragð hlutlægni. Þannig gangist nemendur inn á að þeirra markmið í skólanum sé að fá sem hæstar einkunnir (í ljósi skiptagildis þeirra) og að það sé sjálfsagt og eðlilegt, ef ekki nauðsynlegt, að opnað sé og lokað fyrir möguleika fólks í lífinu og því raðað í virðingarstiga eftir slíkum mælikvörðum. Eins og ég sé það ber það ekki vott um mikla umhyggju fyrir samfélaginu sem heild.

## **Test-driven teaching and care for mathematics learning**

In Icelandic secondary schools, students take frequent tests and submit homework for which they are graded. The tests have a significant impact on teaching and learning because students are often very busy succeeding on exams, and teachers spend considerable time and energy preparing exams, preparing students for exams and reviewing exams (Hafðís Ingvarsdóttir, 2018; Laufey Petrea Magnúsdóttir, 2015). I discuss this test-driven teaching method based on the philosophical perspective of care for mathematics learning (Watson, 2021). That perspective combines two ideas about mathematics teaching: caring for students and caring for mathematics. I also explicitly include the dimension of caring for the community in this concept.

Caring for students is conceptualised in the philosophical tradition of care ethics (Held, 2006; Noddings, 2012) while caring for mathematics is a notion borrowed from the research tradition in mathematics education (Hackenberg, 2005; Mason, 2009; Mason & Hanna, 2016; Watson, 2021). Caring for students entails listening to them to understand their experiences and the needs they express. It includes feeling a pull to meet the student's needs, and then the teacher must respond to the students. They can then try to meet the expressed needs, but sometimes, the teacher may have reason not to. For example, the teacher may not want to help students avoid tackling mathematical challenges. In every case, the caring teacher must cultivate a caring relationship through a continued dialogue. Caring for mathematics involves respecting and promoting the values and norms of the discipline, seeing it as a meaning-making and truth-seeking process of conjecturing and convincing one's self and others through reasoning. In addition, I argue that care for mathematics learning cannot be isolated from its context inside the educational system, where the instrumental value of academic certificates and credentials (especially those related to mathematics) may overshadow the use value of the disciplines (Williams, 2012).

After discussing the available research on test-driven mathematics teaching in Icelandic upper-secondary schools, I introduce and explain the perspective of care for mathematics learning. I discuss the research method based on research from the inside (Mason 1998, 2002) and reflective analysis based on care for mathematics learning. Research from the inside includes collecting brief but vivid accounts of incidents upon which I reflect.

I present eight short accounts of incidents related to tests and grading from my mathematics teaching in Icelandic high schools, which I interpret through the lens of care for mathematics learning. Some of the accounts depict students' deep concern with the instrumental value of mathematics, leading their attention away from enjoyment and engagement with mathematics toward efforts to minimise the risk of low grades or failure. Some accounts illustrate my concern for my relationships with students and the emotional weight of these relationships, including disappointment with having failed to connect students with mathematics. Some accounts highlight my and other teachers' concern over accountability and the integrity of the grading systems. The accounts thus shed light on what caring for mathematics education entails and the possibilities for practising such care in test-driven teaching.

The accounts highlight a triple tension that mathematics teachers face if they want to pursue care for mathematics learning. First, they must try to meet the needs expressed by students and cultivate relationships with them. Second, they seek to honour mathematics values and immerse students in exploring, truth-seeking and reasoning. Third, they strive to meet the requirements of the school system and society for measurable results from the teaching. An analysis of the accounts through the care for mathematics learning lens shows that test-driven teaching undermined my and my students' care for mathematics learning. I conclude that test-driven teaching does not reflect care for the wider society.

**Keywords:** testing, care, mathematics teaching, grading

## Um höfund

Ingólfur Gíslason (ingolfug@hi.is) er aðjunkt við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hann er með B.S.-gráðu og M.Paed.-gráðu í stærðfræði frá Háskóla Íslands og lauk Ph.D.-gráðu í menntavísindum frá Háskóla Íslands 2023. Rannsóknaráhugi hans beinist einkum að orðræðu og samskiptum í stærðfræðinámi og -kennslu, verkefnahönnun, möguleikum forritunar og stærðfræðiforríta til að styðja merkingarbært stærðfræðinámi, menntun stærðfræðikennara, tengslum stærðfræðimenntunar við samfélagsleg álitamál og hugmyndafræði, og sögu og heimspeki stærðfræðimenntunar.

## About the author

Ingólfur Gíslason (ingolfug@hi.is) is an adjunct lecturer at the School of Education at the University of Iceland. He holds B.Sc. and M.Paed degrees in mathematics and a Ph.D in education from the University of Iceland. His research interests include mathematical discourse, the design of mathematics tasks, computer programming and software for mathematics learning, mathematics teacher education, the relationship of mathematics education to societal issues, and its history and philosophy.

## Heimildir

- Abtahi, Y. (2022). What if I was harmful? Reflecting on the ethical tensions associated with teaching the dominant mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 110(1), 149–165. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10117-1>
- Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinnsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur Möller. (2014). *Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum*. Mennta- og menningarmálaráðuneytið. <https://www.stjornarradid.is/media/menntamalaraduneyti-media/media/frettir2014/uttekta-a-staerdfaedikennslu-i-framhaldsskolum-2014.pdf>
- Benedikt Jóhannesson. (1987). *Um stærðfræðikennslu í framhaldsskólum*. Menntamálaráðuneytið.
- Biesta, G. (2005). Against learning: Reclaiming a language for education in an age of learning. *Nordic Studies in Education*, 25(1), 54–66.
- Birhane, A. (2021). *Algorithmic injustice: A relational ethics approach*. *Patterns*, 2(2), 100205. <https://doi.org/10.1016/j.patter.2021.100205>
- Bjarnheiður Kristinsdóttir. (2022). Opportunities and challenges that silent video tasks bring to the mathematics classroom. Í A. Clark-Wilson, O. Robutti og N. Sinclair (ritstjórar), *The Mathematics Teacher in the Digital Era* (bls. 119–148). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-031-05254-5_5)
- Bjarnheiður Kristinsdóttir, Freyja Hreinsdóttir, Zsolt Lavicza og Charlotte E. Wolff. (2020). Teachers' noticing and interpretations of students' responses to silent video tasks. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 135–153. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1722959>
- Bourdieu, P. (1989). Social space and symbolic power. *Sociological Theory*, 7(1), 14–25. <https://doi.org/10.2307/202060>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics* (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland og V. Warfield ritstýrðu og þýddu). Kluwer.
- Cabral, T. C. B. og Baldino, R. R. (2019). The credit system and the summative assessment splitting moment. *Educational Studies in Mathematics*, 102(2), 275–288. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09907-5>
- Civil, M. (2002). Chapter 4: Everyday mathematics, mathematicians' mathematics, and school mathematics: Can we bring them together? *Journal for Research in Mathematics Education: Monograph*, 11, 40–62. <https://doi.org/10.2307/749964>
- Dowling, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths, pedagogic texts*. Falmer Press.
- Elsa Eiríksdóttir og Ingólfur Ásgeir Jóhannesson. (2016). Sjónarmið stærðfræði- og verkgreinakennara í framhaldsskólum um hvaða öfl hafa áhrif á starfshætti: Námsmat og upplýsingatækni. *Tímarit um uppeldi og menntun*, 25(2), 197–218. <https://ojs.hi.is/index.php/tuom/article/view/2435>

- Erna Ingibjörg Pálsdóttir. (2007). Námsmat í höndum kennara. *Uppeldi og menntun*, 16(2), 45–65. <https://timarit.is/page/5209172#page/n43/mode/2up>
- Ernest, P. (2018). The ethics of mathematics: Is mathematics harmful? Í P. Ernest (ritstjóri), *The philosophy of mathematics education today* (bls. 187–216). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-319-77760-3_12)
- Ernest, P. (2019). Privilege, power and performativity: The ethics of mathematics in society and education. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 35. <http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome35/index.html>
- Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. (2015). Instructional practices in mathematics classrooms. Í K. Krainer og N. Vondrová (ritstjórar), *Proceedings of the Ninth congress of the European society for research in mathematics education* (bls. 3036–3042). Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME.
- Gústaf Adolf Bergmann Sigurbjörnsson. (2014). Að standa ekki á sama. *Hugur*, 26(1), 133–153. <https://timarit.is/page/7103956#page/n132/mode/2up>
- Hackenberg, A. (2005). A model of mathematical learning and caring relations. *For the Learning of Mathematics*, 25(1), 45–51. <http://www.jstor.org/stable/40248486>
- Hafðís Ingvarsdóttir. (2004). Mótun starfskenninga íslenskra framhaldsskólakennara. *Tímarit um menntarannsóknir*, 1(1), 39–47. <https://timarit.is/page/6689164#page/n40/mode/2up>
- Hafðís Ingvarsdóttir. (2018). Kennsluhættir speglaðir í ljósi sjálfræðis: Virðing, ábyrgð og traust. *Sérrit Netlu 2018 – Framhaldsskólinn í brennidepli*. [https://netla.hi.is/serrit/2018/framhaldskolinn\\_brennidepli/03.pdf](https://netla.hi.is/serrit/2018/framhaldskolinn_brennidepli/03.pdf)
- Held, V. (2006). *The ethics of care: Personal, political, and global*. Oxford University Press.
- Hermann, C. (2021). *The critique of commodification: Contours of a post-capitalist society*. Oxford University Press.
- Hersh, R. (1979). Some proposals for reviving the philosophy of mathematics. *Advances in Mathematics*, 31(1), 31–50. [https://doi.org/10.1016/0001-8708\(79\)90018-5](https://doi.org/10.1016/0001-8708(79)90018-5)
- Hoyle, C., Noss, R., Kent, P. og Bakker, A. (2010). *Improving mathematics at work: The need for techno-mathematical literacies*. Routledge.
- Ingólfur Gíslason. (2021). Discussing dependencies of variable points on the basis of a GeoGebra task: Meaning making in a teacher-class dialogue. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 7(2), 301–322. <https://doi.org/10.1007/s40751-021-00087-7>
- Ingólfur Gíslason. (2023). Interactions and tensions between mathematical discourses and schoolwork discourses when solving dynamic geometry tasks: What is internally persuasive for students? *Research in Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2177882>
- Ingólfur Gíslason og Berglind Gísladóttir. (2021). Mótun viðhorfa kennaranema til stærðfræði og tengsl við árangur. *Tímarit um uppeldi og menntun*, 30(2), 185–207. <https://doi.org/10.24270/tuum.2021.30.13>
- Ingvar Sigurgeirsson, Amalía Björnsdóttir, Gunnhildur Óskarsdóttir og Kristín Jónsdóttir. (2014). Kennsluhættir. Í Gerður G. Óskarsdóttir (ritstjóri), *Starfshættir í grunnskólum við upphaf 21. aldar* (bls. 113–158). Háskólaútgáfan.
- Ívar Rafn Jónsson. (2022). *Assessment culture matters: Teachers' and students' perceptions of assessment and feedback* [doktorsritgerð, Háskóli Íslands]. Opín vísindi. <https://hdl.handle.net/20.500.11815/3489>
- Jóhann Örn Sigurjónsson og Berglind Gísladóttir. (2020). Vitsmunaleg áskorun í stærðfræðikennslu á ungl-ingastigi. *Tímarit um uppeldi og menntun*, 29(2), 149–172. <https://doi.org/10.24270/tuum.2020.29.8>
- Kennarasamband Íslands. (2022). *Síðareglur KÍ*. <https://www.ki.is/um-ki/stefna-ki/sidareglur/>
- Kvale, S. (1996). Examinations reexamined: Certification of students or certification of knowledge? Í J. Lave og S. Chaiklin (ritstjórar), *Understanding practice: Perspectives on activity and context* (bls. 215–240). Cambridge University Press.
- Laufey Petrea Magnúsdóttir. (2015). „Undir skólans menntamerki“: Greining á skólamenningu í Menntaskólanum á Akureyri [meistararitgerð, Háskóli Íslands]. <http://hdl.handle.net/1946/23081>
- Lára Huld Björnsdóttir. (2014). „Allir þarfnast umhyggju“: Sýn framhaldsskólanema á mikilvægi umhyggju kennara [meistararitgerð, Háskóli Íslands]. <http://hdl.handle.net/1946/20127>
- Lockhart, P. (2009). *A mathematician's lament*. Bellevue Literary Press.
- Lög um framhaldsskóla nr. 92/2008.

- Marx, K. (1990). *Capital: A critique of political economy, Vol. I*. Penguin (frumútgáfa 1867).
- Mason, J. (1998). Researching from the inside in mathematics education. Í A. Sierpínska og J. Kilpatrick (ritstjórar), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (2. bindi, bls. 357–377). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-011-5196-2\\_8](https://doi.org/10.1007/978-94-011-5196-2_8)
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge Falmer.
- Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: Attention, awareness, and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. Í B. Jaworski og T. Wood (ritstjórar), *The international handbook of mathematics teacher education: The mathematics teacher educator as a developing professional* (4. bindi, bls. 31–55). Sense.
- Mason, J. (2009). Teaching as disciplined enquiry. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 15(2), 205–223. <https://doi.org/10.1080/13540600902875308>
- Mason, J. og Hanna, G. (2016). Values in caring for proof. Í B. Larvor (ritstjóri), *Mathematical cultures: The London meetings 2012–2014* (bls. 235–257). Springer.
- Menntamálaráðuneytið. (1999). *Aðalnámskrá framhaldsskóla: Stærðfræði*. <https://www.stjornarradid.is/gogn/rit-og-skyrslur/stakt-rit/1999/07/01/Adalnamskra-framhaldsskola-staerdfraedi-1999/>
- Mennta- og menningarmálaráðuneyti. (2015). *Aðalnámskrá framhaldsskóla 2011: Almennur hluti* (2. útgáfa). [https://www.stjornarradid.is/library/01--Frettatengt---myndir-og-skrar/MRN/Adalnamskra%20framhaldsskola\\_2\\_utg\\_breyt\\_2015\\_.pdf](https://www.stjornarradid.is/library/01--Frettatengt---myndir-og-skrar/MRN/Adalnamskra%20framhaldsskola_2_utg_breyt_2015_.pdf)
- Mennta- og menningarmálaráðuneyti. (2020). *Framtíðarstefna um samræmt námsmat: Tillögur starfshóps um markmið, hlutverk, framkvæmd og fyrirkomulag samræmdra könnunarprófa*. [https://www.stjornarradid.is/library/01--Frettatengt---myndir-og-skrar/MRN/191015\\_framt%C3%AD%C3%B0arstefna%20um%20samr%C3%A6mt%20n%C3%A1msmat\\_lokagerd.pdf](https://www.stjornarradid.is/library/01--Frettatengt---myndir-og-skrar/MRN/191015_framt%C3%AD%C3%B0arstefna%20um%20samr%C3%A6mt%20n%C3%A1msmat_lokagerd.pdf)
- Movshovits-Hadar, N. (1988). School mathematics theorems: An endless source of surprise. *For the Learning of Mathematics*, 8(3), 34–40. <https://flm-journal.org/Articles/25D52D0AA169E7DE039E32AC027A45.pdf>
- Noddings, N. (2002). *Educating moral people: A caring alternative to character education*. Teachers College Press.
- Noddings, N. (2003). Is teaching a practice? *Journal of Philosophy of Education*, 37(2), 241–251. <https://doi.org/10.1111/1467-9752.00323>
- Noddings, N. (2012). The caring relation in teaching. *Oxford Review of Education*, 38(6), 771–781. <https://doi.org/10.1080/03054985.2012.745047>
- OFSTED. (2006). *Evaluating mathematics provision for 14–19-year-olds*. <https://dera.ioe.ac.uk/id/eprint/5985>
- Ólafur Páll Jónsson. (2022). Ljóð, sögur og lifandi hugsun. *Sérrit Netlu 2022 – Framtíð og tilgangur menntunar: Sérrit til heidurs Jóni Torfa Jónassyni, prófessor emeritus*. [https://netla.hi.is/serrit/2022/heidurs\\_jon\\_torfa/21.pdf](https://netla.hi.is/serrit/2022/heidurs_jon_torfa/21.pdf)
- Pais, A. (2013). An ideology critique of the use-value of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 84(1), 15–34. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9484-4>
- Pólya, G. (1990). *How to solve it*. Penguin.
- Priest, G. (2022). How do you apply mathematics? *Axiomathes*, 32, 1169–1184. <https://doi.org/10.1007/s10516-022-09633-3>
- Rúnar Sigþórsson. (2008). *Mat í þágu náms eða nám í þágu mats: Samræmd próf, kennsluhugmyndir kennara, kennsla og nám í náttúrufræði og íslensku í fjórum íslenskum grunnskólum* [doktorsritgerð, Kennaraháskóli Íslands]. <http://hdl.handle.net/1946/1973>
- Savola, L. T. (2008). *Video-based analysis of mathematics classroom practice: Examples from Finland and Iceland* [doktorsritgerð, Columbia University].
- Sigrún Aðalbjarnardóttir. (2007). *Virðing og umhyggja: Ákall 21. aldar*. Heimskringla, háskólaforlag Máls og menningar.
- Sigurkarl Stefánsson. (1929). Um stærðfræði og eðlisfræði sem skólafög. *Tímarit Verkfræðingafélags Íslands*, 14(6), 53–54. <https://timarit.is/page/5440091?iabr=on#page/n1/mode/2up>
- Su, F. (2020). *Mathematics for human flourishing*. Yale University Press.
- Vinner, S. (1997). From intuition to inhibition: Mathematics education and other endangered species. Í E. Pehkonen (ritstjóri), *Proceedings of the 21th Conference of the International group for psychology of mathematics education* (1. bindi, bls. 63–78). Lahti research and training centre, University of Helsinki.

- Watson, A. (2008). School mathematics as a special kind of mathematics. *For the Learning Mathematics*, 28(3), 3–7. <https://www.jstor.org/stable/40248612>
- Watson, A. (2021). *Care in mathematics education: Alternative educational spaces and practices*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-64114-6>
- Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13(1), 1–14. <https://doi.org/10.1002/cpa.3160130102>
- Wiliam, D. (2011). What is assessment for learning? *Studies in Educational Evaluation*, 37(1), 3–14. <https://doi.org/10.1016/j.stueduc.2011.03.001>
- Wiliam, D., Bartholomew, H. og Reay, D. (2004). Assessment, learning and identity. Í P. Valero og R. Zevenbergen (ritstjórar), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology* (bls. 43–62). Kluwer.
- Williams, J. (2012). Use and exchange value in mathematics education: Contemporary CHAT meets Bourdieu's sociology. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 57–72. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9362-x>
- Þóra Þórðardóttir og Unnar Hermannsson. (2012). *Úttekt á stærðfræðikennslu á unglíngastigi grunnskóla. Mennta- og menningarmálaráðuneytið*. <https://www.stjornarradid.is/gogn/rit-og-skyrslur/stakt-rit/?NewsId=3f3bad36-1dd9-11e7-9c14-e4a7a00e173e>



Ingólfur Gíslason. (2023).

Prófadrifin kennsla og umhyggja fyrir stærðfræðinámi

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun. Menntavísindasvið Háskóla Íslands.

Sótt af <http://netla.hi.is/greinar/2023/alm/21.pdf>

DOI: <https://doi.org/10.24270/netla.2023/21>